UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA CENTROAMERICANO DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA

EL MODELO GEOMÉTRICO DEL PLANO RADIAL EN LA FORMACIÓN DE HABILIDADES GENERALES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

LUCIA-ANNELI GONZAL PUNTANEN

TESIS PRESENTADA COMO UNO DE LOS REQUISITOS PARA OPTAR AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ
1998

APROBADO POR:

PROF. GERMAN BEITIA, M. Sc.
PRESIDENTE

PROF. ANALIDA ARDILA, M. Sc.
MIEMBRO

DR. JORGE HERNÁNDEZ
MIEMBRO

REPRESENTANTE DE LA VICERRECTORÍA
DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

FECHA: 23/10/98

DEDICATORIA

A mi madre, **EILA ANNELI PUNTANEN**, por su inmenso afecto.

A mi tia **KAIJA**, por sus incontables atenciones.

A mi padre, **ULPIANO AMADIS GONZAL**, por alentarme siempre hacia la superación.

A mi hermano **URHO**, cuyo apoyo ha sido determinante, tanto en la realización de mis estudios de Maestría, como en la culminación del presente trabajo.

A mi hermano **OLAVI**, por brindarme siempre su respaldo incondicional.

AGRADECIMIENTO

A **DIOS**, porque siempre ha puesto en mi camino los medios para mi superación profesional y espiritual.

Al profesor **GERMÁN LUIS BEITÍA**, no sólo por su eficiente asesoría, sino también por ser un modelo de dinamismo y superación.

A los profesores **ANALIDA ARDILA** y **JORGE E. HERNÁNDEZ**, por sus valiosas recomendaciones.

A la profesora **ALICIA DE BRANDAO**, por su desinteresado apoyo y sobre todo por ser más que una amiga, una hermana.

A mis profesores y compañeros del Programa de Maestría en Matemática Educativa, porque todos forman parte de este logro que hoy me enorgullece.

A todas las personas que me animaron, que me brindaron sus consejos, mi eterno agradecimiento.

CONTENIDO

RESUMEN

En el presente trabajo se efectúa un análisis de las propiedades del modelo geométrico denominado Plano Radial, *C*, y de las características que hacen de éste un ambiente de aprendizaje que contribuye a la formación de habilidades de pensamiento. Para esto, describimos los aspectos relevantes sobre la *resolución de problemas*, y nos basamos en el modelo de Polya. Además presentamos los resultados de un seminario realizado en 1997, en Las Tablas, provincia de Los Santos, e impartido a estudiantes y profesores de Matemática. Nuestra propuesta metodológica consiste en incorporar, a alguno de los cursos de la Licenciatura en Matemática, la enseñanza del modelo del Plano Radial con el propósito de promover las destrezas y habilidades generales de la resolución de problemas.

SUMMARY

The present work shows an analysis of the properties of the geometric model called Radial Plane, *C*. This work also shows the characteristics that make of this plane a good learning environment to contribute to the formation of reasoning skills. In order to achieve these objectives, we describe the relevant aspects about the *problem solving*, based on the model of Polya. In addition, we present results of a seminar celebrated in 1997, in Las Tablas, Province of Los Santos, given to students and professors of Mathematics. Our methodological proposal consists in incorporating, in one of the courses of Licenciatura in Mathematics, the teaching of the Radial Plane Model with the purpose of promoting the general skills of problem solving.

INTRODUCCIÓN

El tema en torno al cual se desarrolla el presente trabajo de graduación, ha surgido debido a dos sentidas inquietudes: nuestro creciente interés en la Geometría, y la legítima preocupación porque la enseñanza de la Matemática contribuya no sólo a la adquisición de conocimientos, sino también al desarrollo de las habilidades de pensamiento.

Posiblemente, una de las mayores causas del bajo aprovechamiento de nuestros estudiantes es la carencia de efectivas estrategias de aprendizaje, puesto que los cursos, tanto a nivel medio como superior, enfatizan principalmente el logro de los primeros niveles descritos en la taxonomía de Bloom (conocimiento, comprensión, aplicación).

Sin embargo, en la actualidad la enseñanza de habilidades de pensamiento es potencialmente una de las más valiosas áreas de la investigación y del desarrollo educativos. Este movimiento se basa en la creencia de que el pensamiento puede ser enseñado y aprendido, y que por ello es posible aumentar el nivel general de inteligencia de un estudiante [Fisher (1990)].

Las implicaciones educativas del constante cambio tecnológico en la sociedad nos conducen hacia una revisión de nuestras estrategias de enseñanza-aprendizaje. Los estudiantes necesitarán poseer conocimientos, pero debido a la dificultad en determinar qué hechos necesitarán para el futuro, el énfasis debe dirigirse hacia la capacidad de obtener nuevo conocimiento, organizarlo y utilizarlo.

La enseñanza de la Matemática en Panamá no puede estar al margen de esta realidad, preocupación que puede percibirse en nuestros congresos y eventos académicos, encaminados al mejoramiento de su calidad. Es por esta razón que proponemos la inclusión del modelo del Plano Radial en alguno de los cursos de la Licenciatura en Matemática (por ejemplo: Didáctica de la Matemática, Didáctica del Álgebra y Geometría, Teoría del Aprendizaje de la Matemática), como material educativo que favorece no sólo el aprendizaje de conocimientos, sino de habilidades que generalmente no se promueven en los contenidos tradicionales.

La estructura que le hemos conferido a este trabajo es la siguiente:

En el **Primer Capítulo** abordamos aquellos hechos históricos que nos permiten comprender mejor la creación y el uso de los modelos geométricos. Con este propósito describimos brevemente el surgimiento de las geometrías no euclidianas, procurando resaltar sus repercusiones en el pensamiento matemático. Esto nos conduce a mencionar el desarrollo del método axiomático y finalmente el uso de los modelos.

El **Segundo Capítulo** está dedicado a la descripción y estudio del modelo del Plano Radial. Para ello utilizamos los Postulados de Birkhoff y analizamos si éstos se verifican o no en el modelo del plano C. Luego procedemos al estudio de algunas propiedades importantes referentes a los triángulos, a las circunferencias y círculos, a la perpendicularidad y a las transformaciones elementales en el modelo del Plano Radial. Finalizamos con un cuadro comparativo de las propiedades del modelo del Plano Radial y del plano cartesiano de la geometría euclidiana.

En el **Tercer Capítulo** exponemos los principales lineamientos sobre la teoría general de resolución de problemas como un campo de investigación, y nos centramos en el clásico modelo presentado por George Polya, ilustrándolo con la resolución de un problema sobre el modelo del Plano Radial. Luego detallamos las habilidades, actitudes y conocimientos que se promueven con la resolución de problemas sobre el modelo del plano C.

Por último, exponemos nuestras recomendaciones, la bibliografía consultada y, en el anexo, los resultados de la encuesta aplicada a los participantes del Seminario *Modelos Geométricos en la Formación del Pensamiento Crítico,* el cual fue dirigido a estudiantes de la Licenciatura en Matemática y a profesores de Matemática de los niveles medio y superior, de las provincias de Herrera y Los Santos, en enero de 1997.

CAPÍTULO I

RESEÑA HISTÓRICA DE LA GEOMETRÍA: ALGUNOS ASPECTOS DE SU EVOLUCIÓN HASTA EL USO DE LOS MODELOS GEOMÉTRICOS

Introducción

La Matemática, como las demás ciencias ha evolucionado a lo largo de la historia. Asimismo la Geometría ha adquirido un nuevo significado, como parte integradora de la Matemática. Pues, al considerar la definición etimológica del término "geometría" ("medición de la tierra"), se puede deducir que ésta se limitaba a un campo de la ingeniería civil en sus inicios. Sin embargo, aunque en la actualidad no existe uniformidad en cuanto a su definición se refiere, así lo sostiene Wilder [Wilder (1968)], ya la Geometría no constituye específicamente el estudio del espacio físico que nos rodea. Félix Klein, en su *Programa de Erlanger* (1872), presentó una definición algebraica y muy general de Geometría que, según Eves [Eves (1981)], abrió nuevos campos a la investigación geométrica:

"Una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto S que permanecen invariantes cuando los elementos de S están sujetos a las transformaciones de algún grupo de transformación Γ. Tal geometría será denotada por el símbolo $G(S,\Gamma)$".

Según Eves [Eves (1981)], al final del siglo XIX cada geometría llegó a considerarse como un campo particular de la Matemática. Y pese a que la definición de "geometría" dada por Félix Klein prometía la unificación, en 1906 Maurice Fréchet (1878-1973) inició el estudio de los espacios abstractos y aparecieron geometrías más generales que no entran dentro de la clasificación dada por Klein.

En tiempos más recientes, Veblen y Whitehead en su libro *Los Fundamentos de la Geometría Diferencial* (1932), llegaron a manifestar que: "Cualquier definición objetiva de geometría incluiría probablemente toda la matemática".

Aunque nuestro propósito aquí no es discutir cuál es la posición de la Geometría dentro de la Matemática, sí queremos enfocar la atención en su importancia y en la forma en que ha evolucionado. Para ello, daremos un rápido vistazo a su desarrollo histórico, deteniéndonos a describir con mayor detalle el nacimiento de las geometrías no euclidianas. Esto último nos conducirá, de manera natural, a un breve estudio sobre los sistemas postulacionales y el papel que desempeñan los modelos geométricos. Todo lo anterior constituye un preámbulo necesario para abordar nuestro segundo capítulo, el Modelo del Plano Radial.

1.1 La Geometría de los Antiguos Griegos

La geometría más antigua fue intuitiva, puesto que los resultados obtenidos se referían a medidas, sin intentos de demostrar esos hechos a través de algún proceso de razonamiento deductivo [Smith (1958)]. No obstante, los egipcios, babilonios, hindúes y chinos lograron resultados geométricos que se aproximan sorprendentemente a lo establecido en tiempos modernos. Según Wilder [Wilder (1968)], es erróneo decir que estas civilizaciones remotas no probaban sus reglas, sino que estas "pruebas" tenían un carácter empírico, como ocurre en la actualidad con las ciencias naturales. Es decir, que el concepto de "prueba" es relativo y variable según la cultura, la época y el objeto de estudio.

Los antiguos griegos fueron los primeros en percibir la necesidad de "probar" los resultados geométricos utilizando el razonamiento deductivo, confiriéndole a la geometría un carácter sistemático [Eves (1985)]. Por esta razón, muchos historiadores modernos se refieren a la geometría como ciencia a partir de los antiguos griegos.

La geometría demostrativa fue la principal característica de la matemática de los griegos [Smith (1958)]. Thales de Mileto (siglo VI a.C.) ha sido reconocido como uno de los primeros en presentar demostraciones de proposiciones que habían sido descubiertas intuitivamente. También se destaca Pitágoras de Samos (siglo V a.C.) quien continuó la sistematización de los resultados geométricos, muchos de los cuales habían sido legados por otras culturas.

Eves [Eves (1985)] sostiene que ya hacia finales del siglo IV a.C. los geómetras griegos habían logrado un cúmulo de conocimientos geométricos, deductivamente analizados, lo cual alentó a muchos a tratar de ordenar en forma sistemática este conocimiento. Así en el siglo III a.C. apareció una obra titulada *Los Elementos* , la cual ha sido considerada como "*el epítome de perfección lógica*", según las palabras de Wilder [Wilder (1968)]. En este trabajo su autor, Euclides (330-275 a.C.), a partir de unas cuantas suposiciones básicas (llamadas *axiomas* y *postulados*) y de un conjunto de definiciones, logró deducir en una cadena lógica un total de 465 proposiciones.

Félix Klein afirmó que Euclides no pretendía hacer de *Los Elementos* una enciclopedia de toda la matemática griega de su tiempo, ya que excluyó en él varios trabajos importantes, incluso propios. Sin embargo, pese a que su obra adolece de muchas imperfecciones según los estándares actuales, jugó un papel crucial en la evolución de la geometría, como veremos más adelante.

1.2 El Surgimiento de las Geometrías No Euclidianas

Los orígenes de las geometrías no euclidianas se remontan a la época del esplendor de los antiguos griegos, como ha ocurrido con muchas otras invenciones dentro de la Matemática [Eves (1981)]. La obra que desató un mar de polémicas fue el tratado de Euclides (330-275 a.C.) titulado *Los Elementos*, en particular el análisis de uno de sus postulados.

Al inicio de su Libro I, en *Los Elementos*, Euclides presenta la siguiente lista de postulados :

1. Una recta puede trazarse desde un punto cualquiera hasta otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente y hacerse una recta ilimitada e indefinida.
3. Una circunferencia puede describirse con un centro y una distancia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta que corta a otras dos, forma con éstas ángulos interiores del mismo lado de ellas que sumados sean menores que dos rectos, entonces se cortarán del lado en que dicha suma de ángulos sea menor que dos rectos (Fig. 1.0).

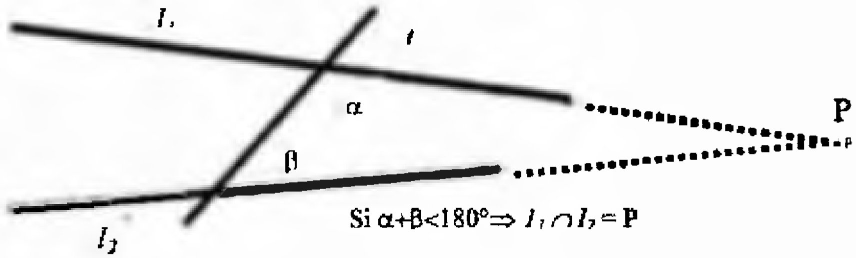


Fig. 1.0

Estos postulados de Euclides fueron objeto de consideraciones críticas entre los posteriores griegos. Por ejemplo, Zenón de Sidón (s. I a.C.) aseveró que no eran suficientes, pues consideraba necesario postular que dos líneas rectas distintas no pueden tener segmentos en común. Él afirmó que si esto no se postulaba, entonces una o más de las pruebas del Libro I eran erróneas [Smith (1958)].

Otros antiguos griegos consideraron que los postulados 4 y 5 podían probarse ; es decir, que eran en realidad teoremas. Sin embargo, de todas las críticas que provocó el estudio de *Los Elementos*, la que nos conduce a la invención de las geometrías no euclidianas es el análisis de la independencia del Postulado 5, llamado también "Axioma de las Paralelas".

El filósofo neo-platónico Proclus (s. V) nos dice en su *Comentario sobre Euclides, Libro I* que el Postulado 5 fue objeto de críticas desde un principio. Según Wilder [Wilder (1968)] fue la carencia de estética de este postulado lo que hizo sospechar, durante siglos, que el Axioma de las Paralelas podía ser deducido de los otros postulados.

Eves [Eves (1981)] sintetiza las principales características que explican la naturaleza polémica del Axioma de las Paralelas, a saber :

- Su carencia de brevedad y fácil comprensión, lo cual le impedía ser "evidente por sí mismo".
- Su análisis revela que es el recíproco de la Proposición I.17 (Prop. I.17 : "En todo triángulo la suma de cualesquiera dos ángulos es menor que dos ángulos rectos").
- Euclides aparentemente lo utilizó con renuencia al aplazar sus uso hasta llegar a la Prop. I.29.

Se supone que la forma tan peculiar en que Euclides enunció su quinto postulado se debe a que así se podía verificar el paralelismo indirectamente, ya que en el plano en que trabajamos resulta imposible comprobar experimentalmente su validez [Bromberg y Moreno (1987)].

1.2.1 Intentos más Notables por Establecer el Postulado 5 como un Teorema.

Según Eves [Eves (1985)] uno de los primeros esfuerzos, de los que se tiene noticia, dedicado a "probar" el Postulado 5 fue hecho por Claudius Ptolomeo (150 d.C.). Uno de los argumentos de Ptolomeo era : Si $a + b$ es un ángulo recto, entonces $c + d$ debe ser un ángulo recto (Fig. 1.1).

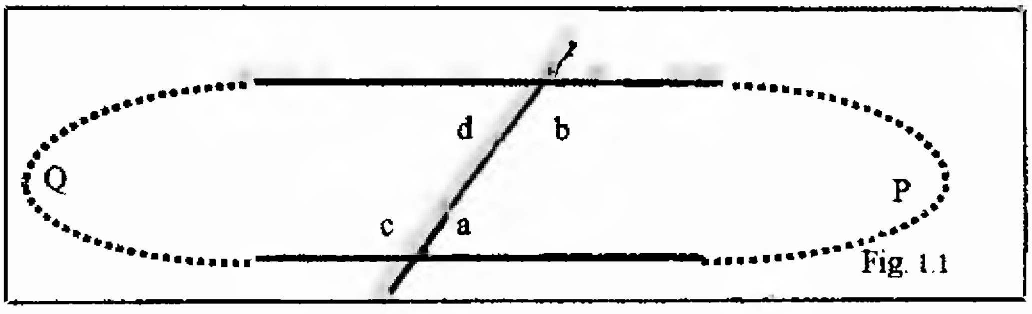


Fig. 1.1

Por consiguiente, si las líneas se encuentran en P, también deberán encontrarse en Q. En este caso, las dos líneas encerrarían espacio.

Proclus mostró que la "prueba" de Ptolomeo era errónea, al señalar que Ptolomeo implícitamente había asumido que a través de un punto, que está fuera de una línea recta dada, sólo puede trazarse una paralela a la línea dada.

El intento que presentó Proclus era más ingenioso y se refería al encuentro de líneas en general. Sin embargo, la "prueba" de Proclus descansa sobre la suposición de que las líneas paralelas se encuentran separadas a igual distancia, lo cual es equivalente al mismo Postulado 5.

Durante siglos persistieron esfuerzos similares, ya no sólo entre los griegos sino también en otras culturas. Por ejemplo, como nos comenta Boyer [Boyer (1968)], el Axioma de las Paralelas despertó entre los árabes un especial interés, pese a que la geometría no era el principal campo de estudio. En el siglo XIII destaca la figura del astrónomo y matemático persa Nasir Eddin al-Tussi (1201-1274), quien escribió un tratado sobre el Postulado 5 de Euclides, pero la "prueba" que presentó dependía también de una hipótesis equivalente a este postulado.

Posteriormente, interesado en el trabajo de Nasir Eddin, el matemático inglés John Wallis (1616-1703) presentó una "prueba" del Postulado 5, la cual se basaba en admitir la existencia de triángulos semejantes no congruentes, lo cual equivale al postulado mismo.

En síntesis, el relato de los intentos por establecer el Postulado 5 como un teorema es bastante extenso y cada uno termina con el señalamiento, por parte de otros investigadores, de que el razonamiento era falaz debido a la utilización, implícita o inconsciente, de suposiciones equivalentes al Axioma de las Paralelas [Eves (1981)].

Sin embargo, hay un trabajo que debido a su enfoque amerita especial consideración: la investigación del jesuita Girolamo Saccheri (1667-1733), cuyos resultados fueron publicados en la obra *Euclides Liberado de Toda Culpa*. La particularidad de este trabajo, según Eves [Eves (1981)], radica en que fue probablemente el primer intento en analizar las consecuencias de una negación del Postulado 5. Saccheri concentró su esfuerzo en mostrar que si se negaba el Axioma de las Paralelas y esta negación se agregaba a los otros axiomas, entonces resultaría una contradicción. Éste es el clásico argumento de *reducción al absurdo*, tan ponderado por los griegos y admirado por Saccheri.

En la obra *Euclides Liberado de Toda Culpa*, Saccheri utiliza como herramientas las 28 primeras proposiciones del Libro I de Euclides, puesto que éstas no requieren del Postulado 5 para su prueba. Y se dedica a analizar el cuadrilátero isósceles birectangular, que ahora es conocido como "cuadrilátero de Saccheri". Éste consiste en un cuadrilátero ABDC tal que AC=BD y los ángulos interiores en A y B son rectos (Fig. 1.2).

Fig. 1.2

Cuadrilátero de Saccheri

Sin emplear el Postulado 5, Saccheri mostró que los ángulos interiores en C y D son iguales. Para ello trazó las diagonales AD y BC y se sirvió de los teoremas de congruencia. Como no se podía asegurar nada respecto a la magnitud de los ángulos en C y D, surgieron tres posibilidades a las que Saccheri denominó : (1) La hipótesis del ángulo agudo, (2) la hipótesis del ángulo recto, y (3) la hipótesis del ángulo obtuso.

La estrategia de Saccheri consistía en mostrar que las hipótesis (1) y (3) conducían a contradicciones, por el método de reducción al absurdo. De esta manera, quedaba "probado" que la hipótesis del ángulo recto (equivalente al Postulado 5) se derivaba del resto de los postulados de Euclides.

Para descartar la hipótesis (3), del ángulo obtuso, Saccheri no tuvo mucha dificultad, ya que asumió implícitamente que una línea recta es infinita en longitud. Sin embargo, en su intento por eliminar la hipótesis (1), del ángulo agudo, Saccheri fue obteniendo una cadena de teoremas sin llegar a la contradicción que esperaba. En la actualidad sabemos que tal contradicción no se iba a presentar, puesto que los teoremas que se iban derivando eran de una nueva geometría, tan consistente como la euclidiana. Pero Saccheri, en su persistencia por llegar a un "absurdo", forzó una débil contradicción, involucrando nociones confusas sobre elementos en el infinito [Eves (1985)].

Posteriormente se presentaron otros esfuerzos por establecer el Axioma de las Paralelas como un teorema, mediante reducción al absurdo, entre los que se destacan los trabajos del matemático suizo Johann H. Lambert (1728-1777) y del francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

1.2.2 Resultados de los Esfuerzos Dedicados a "Probar" el Postulado 5 de Euclides.

La historia del Postulado 5 ha captado la atención de muchos ; esto se debe probablemente, como Wilder [Wilder (1968)] lo sugiere, a que sorprende el largo período precedente a su solución y en número de esfuerzos dedicados a elaborar su "prueba". En la actualidad sabemos que todos estos intentos estaban destinados al fracaso debido a la independencia del Axioma de las Paralelas. Y que las "pruebas" a las que arribaron muchos hombres, con suma destreza y persistencia, estaban viciadas o contenían un razonamiento falaz, puesto que se basaban en alguna suposición equivalente al mismo postulado que se pretendía "probar". Aunque algunos lograron advertir este error en el razonamiento de otros geómetras o matemáticos, ellos también inconscientemente estaban utilizando suposiciones que, en realidad, eran sustitutos del Postulado 5.

Entre los enunciados equivalentes al Axioma de las Paralelas, obtenidos a lo largo de tantos años de trabajo, se encuentran los siguientes :

1. Dada una recta ℓ y un punto P que no está sobre la recta, existe una única recta m que pasa por P y es paralela a ℓ (Postulado de Playfair) (Fig. 1.3).

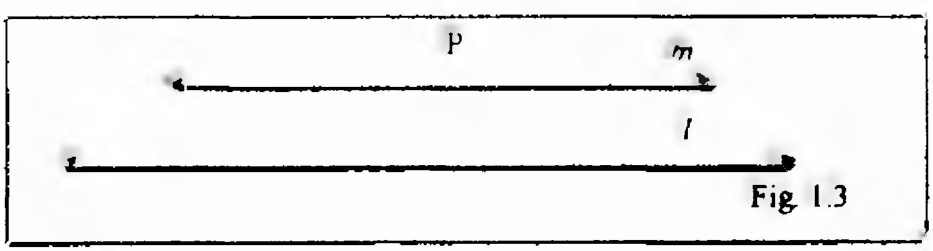


Fig. 1.3

2. Existe un par de líneas rectas coplanares, cada una a igual distancia de la otra.

3. Existe un par de triángulos semejantes no congruentes.

4. Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales, y si los ángulos adyacentes a un tercer lado son ángulos rectos, entonces los otros dos ángulos son también ángulos rectos.
5. Si en un cuadrilátero tres ángulos son ángulos rectos, entonces el cuarto ángulo es también recto.
6. La suma de los ángulos internos de todo triángulo es dos rectos.
7. A través de un punto dentro de un ángulo menor de 60° se puede siempre trazar una linea recta que intersecta ambos lados del ángulo.
8. Un círculo puede ser trazado a través de cualesquiera tres puntos no colineales.
9. No hay límite superior al área de un triángulo.

De la simple lectura de los anteriores enunciados se puede notar que muchos de ellos tienen formas tan complejas como el mismo Postulado 5 de Euclides. Sin embargo, también se han planteado formas más simples o intuitivas del Axioma de las Paralelas que poseen un indiscutible valor didáctico. Este es el caso del enunciado (1), conocido como Postulado de Playfair y que ha sido el preferido en los textos modernos de geometría.

La alternativa (1) del Axioma de las Paralelas lleva el nombre del físico y matemático escocés John Playfair (1748-1819) por ser quien difundió su uso en tiempos modernos, a partir de 1795. Pero Smith (op. cit.) sostiene que este postulado alternativo fue establecido substancialmente por Proclus (s. V) y presentado antes que Playfair por Joseph Fenn en 1769 y William Ludlan en 1785.

No obstante el valor matemático y didáctico que revisten las muchas alternativas al Axioma de las Paralelas, indudablemente que el resultado más trascendental del análisis de este famoso postulado es que condujo finalmente a la creación de nuevas geometrías. Pero el llegar a este importante paso en la historia de la Geometría requirió amplitud mental y una nueva visión, como veremos a continuación.

1.2.3 Un Cambio de Percepción : El Reconocimiento de la Independencia del Postulado 5. Descubrimiento de una Nueva Geometría.

En páginas anteriores se hizo referencia a Saccheri quien, pese a que poseía un profundo conocimiento sobre lógica, no pudo admitir que la hipótesis del ángulo agudo conducía a resultados consistentes. Muchos autores, entre ellos Eves [Eves (1985)], Boyer [Boyer (1968)], Wilder [Wilder (1958)], sostienen que si Saccheri no hubiese estado tan convencido de que el Axioma de las Paralelas era derivable del resto de los postulados de Euclides, probablemente se le habría acreditado la invención de la geometría no euclidiana.

Según Eves (sup. cit.), el matemático alemán Carl F. Gauss (1777-1855) fue probablemente el primero en sospechar que el Postulado 5 era independiente de los demás postulados de Euclides. Sin embargo, Gauss siempre se abstuvo de publicar sus resultados, quizá por temor a la idea prevaleciente en aquella época de que la geometría euclidiana era la única geometría posible.

En realidad, el nombre de aquéllos que alcanzan soluciones a un problema y no las publican generalmente permanece desconocido. El caso de Gauss, como afirma

Wilder [Wilder (1958)], es una excepción, pues quizá un matemático de menor fama no tendría tal reconocimiento.

El primero en publicar un trabajo, convencido de que el Postulado 5 no podía ser probado usando los otros postulados de Euclides, fue el ruso Nicolai I. Lobachevsky (1793-1856), a quien se le ha conferido el título de "El Copérnico de la Geometría" [Eves (1981)].

Según Boyer (op. cit.), en un principio Lobachevsky consideró la posibilidad de que el Axioma de las Paralelas admitiera demostración. Sin embargo, aproximadamente en 1826 llegó a la convicción de que el Postulado 5 era independiente de los otros cuatro. Así en 1829, en su artículo *Sobre los Principios de Geometría*, Lobachevsky presentó resultados que correspondían a una geometría distinta a la euclidiana. Esta nueva geometría se basaba en la siguiente suposición : "Dado un punto P exterior a una línea recta ℓ, existe en el plano más de una línea recta que pasa por P y no cortan a ℓ".

Este nuevo postulado (equivalente a la hipótesis del ángulo agudo) contradice al Postulado 5 de Euclides, pero condujo a Lobachevsky a desarrollar una estructura geométrica exenta de contradicciones lógicas, a la cual él denominó *geometría imaginaria* y que hoy en día es conocida como *geometría hiperbólica.*

En los años posteriores a 1826, fecha considerada como el nacimiento oficial de la geometría no euclidiana, Lobachevsky continuó publicando sus resultados, incluso en otros idiomas. Ello muestra la seguridad que tenía con respecto al significado de su hallazgo, por lo cual a esta nueva geometría también se le denomina frecuentemente con su nombre, *geometría de Lobachevsky* [Boyer (1968)].

Es interesante el hecho de que, en forma independiente y desconociendo las investigaciones de Lobachevsky otro matemático, el húngaro Janós Bolyai (1802-1860) también reconoció la independencia del Postulado 5 y llegó al descubrimiento de la nueva geometría. Más aún, como sostiene Eves [Eves (1985)], Bolyai se había anticipado a Lobachevsky, pues probablemente desde 1823 ya tenía establecidos los principios de la geometría no euclidiana. Sin embargo, fue hasta 1832 que su investigación salió a la luz, como un apéndice de 26 páginas incluido en la obra de su padre. Desafortunadamente, Bolyai no llegó a publicar nada adicional sobre el tema.

Pese a los anteriores hallazgos, la independencia del Postulado 5 de Euclides no fue aceptada inmediatamente. La solución definitiva al problema del Axioma de las Paralelas ocurrió cuando figuras como Eugenio Beltrami (1835-1900), Félix Klein (1849-1925), Arthur Cayley (1821-1895), Henri Poncairé (1854-1912) y otros matemáticos presentaron demostraciones de la consistencia de la hipótesis del ángulo agudo, sobre la cual Lobachevsky y Bolyai habían construido su nueva geometría [Eves (1985)].

1.2.4 El Reconocimiento de una Segunda Geometría no Euclidiana.

Lobachevsky y Bolyai en sus estudios excluyeron la hipótesis del ángulo obtuso de Saccheri. Pero un cuarto de siglo después, el matemático alemán G. F. B. Riemann (1826-1866) desarrolló una nueva geometría no euclidiana basada en la siguiente suposición, equivalente a la hipótesis del ángulo obtuso :

"Dado un punto P exterior a una línea recta ℓ, no existe ninguna paralela a ℓ que pase por P".

Eves [Eves (1981)] señala que para llegar a este resultado fue necesario clarificar previamente los conceptos de inmensidad e infinitud. Pues, como mencionamos anteriormente, la hipótesis del ángulo obtuso fue descartada fácilmente, ya que se suponía implícitamente que la línea recta es infinita en longitud. Sin embargo, el Postulado 2 de Euclides establece que una línea recta puede prolongarse indefinidamente y ello no implica necesariamente que la línea recta sea infinita en extensión. Por ejemplo, si a través de dos puntos sobre una superficie esférica se traza un arco, este arco puede ser prolongado indefinidamente pero realmente no será infinito en extensión. Riemann además tuvo que efectuar ligeras modificaciones a los postulados 1 y 2 de Euclides, así :

1'. Dos puntos distintos determinan al menos una línea recta.

2'. Una línea recta es ilimitada.

Tiempo después, la geometría de Riemann demostró tener una gran aplicabilidad ya que Albert Einstein, en su formulación de la Teoría General de la Relatividad (1916), tuvo que adoptar este tipo de geometría no euclidiana para describir el espacio físico. En el caso de nuestro trabajo, la mención de esta segunda geometría no euclidiana resulta de interés puesto que el modelo geométrico que presentaremos en el siguiente capítulo corresponde a un modelo esférico que preserva algunas propiedades de la geometría riemanniana, denominada también *geometría elíptica* [Eves (1981)].

1.3 Consecuencias del Descubrimiento de las Geometrías No Euclidianas.

El antropólogo L. A. White, en su obra *The Science of Culture : A Study of Man and Civilization* (1949), sostiene que los avances significativos, ya sean invenciones o descubrimientos, son eventos cuya explicación se encuentra en los factores culturales y en una conjugación de elementos. A este respecto hemos señalado que el problema de la independencia del Postulado 5 reviste un especial interés a causa de que, por más de 20 siglos, mentes brillantes se ocuparon de él sin llegar a su solución. Y pese a que hubo quienes, como Saccheri, estuvieron muy cerca de la verdad, fallaron en reconocerla y en advertir el significados de sus resultados (la posibilidad de que hubiese otras geometrías).

En la época en que Saccheri trabajó (principios del siglo XVIII) la Matemática se regía todavía bajo la filosofía de la verdad absoluta. La geometría de Euclides representaba la única verdad, proveniente del mundo platónico de las ideas. Saccheri, desde luego, se ajustaba a las creencias de su tiempo. Más aún, sostiene Wilder [Wilder (1981)], si Gauss no tuvo el coraje de publicar sus convicciones (por "miedo al clamor de los beocios") es posible que Saccheri (todavía un siglo antes) de haber sospechado la existencia de una geometría distinta a la euclidiana, difícilmente lo habría admitido públicamente siendo un sacerdote jesuita vulnerable a las sanciones eclesiásticas.

Sin embargo, a principios del siglo XIX Lobachevsky y Bolyai, ambos contemporáneos de Gauss, sí publicaron sus conclusiones. Wilder [Wilder (1981)] atribuye este hecho a dos posibles causas :

- El clima cultural estaba permitiendo mayor libertad de pensamiento científico.

- Lobachevsky y Bolyai quizá no tenían la presión del reconocimiento científico que envolvía a Gauss.

Por otra parte, Wilder [Wilder (1958)] señala que una de las razones por la que la solución se presentó casi en forma simultánea, como ha sucedido curiosamente con otros adelantos científicos, se debe a la acumulación de nuevas herramientas y conceptos, particularmente a la aparición del carácter formal en los sistemas axiomáticos del álgebra .

El descubrimiento de las geometrías no euclidianas, considerado por Eves [Eves (1981)] como *"una de las grandes sagas en la historia del pensamiento humano"*, tardó varias décadas en ser apreciado en su totalidad pero sus repercusiones fueron muy significativas. Entre las consecuencias de este hecho podemos destacar :

- Motivó cambios de ideas no sólo en el mundo matemático, sino también en la filosofía de aquel tiempo.
- Abrió el campo para la invención de nuevas geometrías.
- Contribuyó a promover un estudio más profundo de los sistemas axiomáticos.

Con este nuevo hallazgo llegó a ser evidente que la filosofía del *mundo platónico de las ideas*, en donde supuestamente residían las verdades matemáticas, debía ser reemplazada por un *mundo de conceptos producto de la invención del hombre.* Esto amplió los horizontes del conocimiento, puesto que el ser humano ahora ya no estaba obligado a limitar sus descubrimientos matemáticos al mundo experimental [Wilder (1968)].

La Geometría se liberó de su patrón euclidiano y así aparecieron formas interesantes y novedosas, por ejemplo: geometrías no arquimedianas, geometrías no desarguesianas, geometrías no riemannianas y muchas más, las cuales se han construido efectuando ciertas variaciones en los fundamentos postulacionales de Euclides. Muchas de estas geometrías "artificiales" posteriormente han demostrado poseer utilidad práctica, como en el caso ya mencionado de la geometría de Riemann. Otro ejemplo es el resultado de una investigación efectuada en 1974, que sostiene que el *espacio visual* (esto es, el espacio psicológicamente observado por personas de visión normal binocular) puede ser descrito mejor por la geometría hiperbólica de Lobachevsky [Eves (1981)].

Además, a raíz de la aparición de nuevas geometrías se hacía necesario efectuar una revisión de los principios que regían la axiomática tradicional de los griegos; tema que abordaremos a continuación de manera sucinta.

1.4 Desarrollo de los Sistemas Axiomáticos.

Independientemente de las teorías que explican las causas del nacimiento del método axiomático, la mayoría de los matemáticos e historiadores sostienen que fue la Geometría la ciencia en que éste se originó y que puede considerarse como la contribución más significativa de los antiguos griegos a la Matemática.

La noción de un *discurso lógico* era el establecimiento de una secuencia de aseveraciones, obtenidas por razonamiento deductivo a partir de un conjunto de aseveraciones asumidas a principios del discurso. Los griegos desarrollaban su discurso lógico de acuerdo al siguiente esquema, denominado actualmente *axiomática material* y que constituye la forma más remota del método axiomático (Cuadro 1) [Eves (1980)].

Cuadro1. Patrón de la Axiomática Material.

I. Se presenta explicaciones iniciales sobre ciertos *términos técnicos básicos*, para sugerir al lector lo que significan.
II. Se lista ciertas aseveraciones primarias relacionadas con los términos básicos, llamadas *axiomas* y *postulados*[1] , que serán aceptadas por el lector ya que constituyen verdades "evidentes".
III. El resto de los *términos técnicos* del discurso se definen por medio de los términos técnicos básicos.
IV. Todas las otras aseveraciones del discurso, denominadas *teoremas*, son deducidas lógicamente a partir de los axiomas y postulados, y de las aseveraciones (o teoremas) previamente establecidos.

En el *Sumario de Eudemo*, Proclus (410-485 d.C.) nos cuenta sobre varios esfuerzos que se realizaron por sistematizar el conocimiento geométrico de aquel tiempo. Sin embargo, como manifiesta Eves [Eves (1980)], *Los Elementos* de Euclides (s.III a.C.) constituyen la más antigua y sobresaliente aplicación del método axiomático que ha llegado hasta nosotros. Su forma de deducción lógica fue considerada ideal, tanto que Arquímedes (287-212 a.C.) y Newton (2000 años después) en sus principales trabajos

[1] Los griegos establecieron una ligera distinción entre *axiomas* y *postulados*. Los primeros se referían a verdades generales y los segundos a verdades válidas para una ciencia particular.

procuraron seguir un patrón lógico similar.

Eves [Eves (1981)] sostiene que la axiomática material permaneció casi inalterable por más de 2000 años, hasta que ocurrieron en el siglo XIX tres eventos que motivaron un análisis más profundo del método axiomático, a saber :

- El descubrimiento de una geometría no euclidiana.
- El descubrimiento de un álgebra no conmutativa.
- El proceso que culminó con la aritmetización del análisis.

En lo que respecta al primer acontecimiento arriba citado, éste produjo una reevaluación del concepto *postulado*. Hemos visto que en toda la investigación sobre la independencia del Axioma de las Paralelas, ninguno cuestionó su verdad. Esta resistencia cultural, según Wilder [Wilder (1968)], fue probablemente la principal razón por la que no fue descubierta antes la geometría no euclidiana. Ahora tenía que abandonarse la palabra "verdad" y pensar en un postulado como una simple suposición básica, que no necesariamente era descriptiva del mundo físico. La existencia de geometrías distintas, en donde los postulados de una podían contradecir los de otra, implicaba que los postulados eran, en algún sentido, materia de elección y no verdades absolutas.

Por otra parte, en (Cuadro1) señalamos que en la axiomática material se planteaban, al inicio del discurso, ciertos términos técnicos básicos llamados ahora *términos primitivos*, sobre los cuales se daban ciertas explicaciones por anticipado con el fin de aclarar su significado. De esta manera en *Los Elementos* encontramos pseudo-definiciones como : "Un *punto* es un objeto que no tiene longitud, anchura ni altura, mientras que una *línea* tiene longitud pero no anchura ni altura". En realidad, estas "definiciones" requerían a su vez la aclaración de los términos empleados en ella, lo cual conduciría a un proceso repetitivo. Por tanto, con el propósito de evitar los círculos viciosos y las "definiciones" sin sentido, en los sistemas axiomáticos modernos a los *términos primitivos* (como punto y línea) no se les asigna significado inicialmente. Pues, si ellos tuvieran significado, entonces los teoremas dependerían no sólo de las propiedades de los términos primitivos expresadas por los axiomas, sino también de propiedades adicionales que se encontrarían a través del uso de los significados. Luego, aquellas propiedades adicionales deberían ser establecidas en los axiomas.

En síntesis, el método axiomático fue gradualmente refinado a partir del siglo XIX con la labor de un gran número de matemáticos. Y *Los Elementos* de Euclides fueron sometidos a un estudio más profundo que reveló muchas de sus imperfecciones. Por ejemplo, se determinó que los postulados de Euclides no eran suficientes, contrario a la antigua sensación de que él había asumido "demasiado" (lo cual condujo a tratar de "probar" el Postulado 5). El más influyente de todos estos trabajos destinados a corregir los errores lógicos de la axiomática de Euclides, fue un riguroso desarrollo postulacional titulado *Fundamentos de Geometría* presentado en 1899 por el alemán David Hilbert (1862-1943). Así la axiomática material de los griegos evolucionó para transformarse en la *axiomática formal* del siglo XX, que corresponde al siguiente patrón [Eves (1985)].

Cuadro 2. Patrón de la Axiomática Formal.

I. El discurso lógico contiene *términos primitivos* (elementos, relaciones, operaciones) que no se definen.
II. El resto de los *términos técnicos* se definen utilizando los términos primitivos.
III. El discurso contiene un conjunto de *postulados*, P, que son enunciados relacionados con los términos primitivos y se aceptan sin demostración.
IV. El resto de los enunciados, llamados *teoremas*, T, del discurso se deducen lógicamente de los postulados.
V. Para cada teorema T_i del discurso existe un enunciado correspondiente que asegura que el teorema T_i se implica lógicamente por los postulados P (ej. "Esto completa la prueba del teorema").
VI. Los postulados P implican los teoremas T.

En el estudio de los sistemas axiomáticos, Eves [Eves (1981)] distingue los siguientes niveles :

1. **Axiomática material** : Comprende los desarrollos axiomáticos concretos sobre campos específicos del conocimiento. Axiomáticas como la de Euclides, en la que a los términos primitivos se les dota de significado inicialmente, son ubicadas en este nivel.
2. **Axiomática formal** : Se refiere a los desarrollos postulacionales abstractos que tienen como campos específicos los *modelos* (de los cuales haremos referencia posteriormente).

3. **Metamatemática** : Es una teoría que estudia las propiedades que poseen los desarrollos postulacionales abstractos o sistemas formales.

En este último nivel propuesto por Hilbert, se convirtieron en objeto de investigación matemática las propiedades de los sistemas axiomáticos, algunas de las cuales Eves [Eves (1981)] define de la siguiente manera :

a) **Equivalencia** : Dos sistemas postulacionales se dicen *equivalentes* si cada sistema implica el otro. Esto es, si los términos primitivos de uno se definen mediante los términos primitivos del otro, y si los postulados de uno son deducibles de los postulados del otro.

b) **Consistencia** : Un sistema de postulados se dice *consistente* si no se encuentran enunciados contradictorios, implicados por el conjunto de postulados. Esta es la propiedad más importante, sin la cual el sistema carecería de valor.

c) **Independencia** : Un postulado de un sistema axiomático se dice *independiente* si no es consecuencia lógica de los otros postulados del sistema. Si cada uno de los postulados del sistema es independiente, el sistema de postulados se dice *independiente*.

d) **Completitud** : Un sistema axiomático se dice *completo* si es imposible agregar al sistema, sin extender la colección de términos primitivos, otro postulado que sea independiente y consistente con los otros postulados. Es decir, un sistema axiomático es completo si los postulados del sistema son suficientes para deducir todos los resultados verdaderos.

En la axiomática formal se investiga si un sistema de axiomas posee propiedades como las mencionadas anteriormente, mediante el método de proveer un *modelo* al sistema, lo cual ampliaremos a continuación.

1.4.1 Utilización de Modelos.

El término *modelo* a menudo es utilizado en diferentes formas, según el contexto. En el marco de la lógica matemática, consideraremos este importante concepto suponiendo que es dado un sistema axiomático S. Como sabemos, S contiene términos primitivos y postulados que involucran estos términos indefinidos. Ahora, si asignamos un significado a cada uno de los términos primitivos, se tendrá que con estos significados los axiomas del sistema adquirirán sentido. Con "asignar un significado" nos referimos, por ejemplo, a asociar un objeto o acción del mundo real con cada uno de los términos primitivos, y así los postulados se convierten en enunciados verificables. Decimos entonces, que la asignación de significados a los términos indefinidos de S constituye un *modelo* del sistema S.

Eves [Eves 1981)] señala dos tipos de modelos :

- **Concreto :** Un modelo se dice *concreto* si los significados asignados a los términos primitivos son objetos y relaciones tomadas del mundo real. Ejemplo : si *punto* es interpretado como un árbol, y *línea* es interpretada como una cerca.
- **Ideal :** Un modelo se dice *ideal* si los significados asignados a los términos primitivos son objetos y relaciones tomadas de otro sistema de postulados. Ejemplo : Félix Klein señaló en 1871 que los axiomas de la geometría plana de

Lobachevsky adquirían su "verdad", cuando los términos primitivos en ella fueran interpretados considerando como *punto* a un punto dentro de un círculo dado del plano euclidiano, y *línea* como una cuerda en este círculo, etc. (Fig. 1.4).

Fig. 1.4

Entre las diversas utilidades de los modelos, particularmente de los modelos geométricos, en [Cerezo y Rodríguez (1995)] encontramos enfatizadas las siguientes :

- Probando consistencia de sistemas de postulados.
- Probando la independencia de postulados. En particular el Postulado de las Paralelas.
- En la completitud de los sistemas postulacionales.
- Utilizado en la resolución de problemas.
- Aplicaciones a la enseñanza.

Veamos brevemente cada uno de los anteriores señalamientos.

1. En la prueba de consistencia de un sistema axiomático.

El método de modelos es el más exitoso para establecer la consistencia de un sistema de postulados. Cuando se logra presentar un modelo concreto, se dice que se ha establecido la *consistencia absoluta* del sistema, puesto que se considera que en el mundo real son imposibles las contradicciones. Pero no siempre es factible obtener un modelo concreto para un sistema, como en el caso en que un conjunto de postulados contiene un número infinito de términos primitivos. En estas circunstancias se presenta un modelo ideal y la prueba se dice que es de *consistencia relativa*. Por ejemplo, al presentar un modelo para la geometría plana de Lobachevsky tomando los conceptos de la geometría plana euclidiana, se prueba que esta geometría no euclidiana es consistente (de consistencia relativa) si la geometría euclidiana lo es.

2. En la prueba de independencia de postulados.

La independencia de un sistema de postulados es más bien un requisito estético, como explica Eves [Eves (1985)], puesto que la existencia de un axioma no independiente no invalida al sistema. Pero si se desea mostrar la independencia de un postulado, una prueba consiste en presentar un modelo en el que se verifique todos los postulados restantes del sistema y la negación del postulado considerado. Así la independencia del Axioma de las Paralelas quedó realmente establecida cuando se presentaron modelos para las geometrías no euclidianas.

3. En la verificación de la completitud de un sistema axiomático.

Existen áreas de la Matemática en las que no es posible desarrollar sistemas axiomáticos que presenten la propiedad de completitud. Además, la prueba de completitud de un sistema postulacional mediante el uso de modelos no se puede garantizar. Sin embargo, un modelo puede brindar gran utilidad cuando lo que se desea verificar es la no completitud de un sistema axiomático. Por ejemplo, si en un modelo de una geometría se detecta una proposición que no aparece como teorema en la geometría, queda demostrada entonces la *no completitud* de ese sistema [Eves (1985)].

4. En la resolución de problemas de otras áreas.

Hemos mencionado que las geometrías no euclidianas han mostrado tener utilidad práctica ; esto es precisamente porque se han desarrollado modelos de esas geometrías que en un momento dado han constituido la herramienta más apropiada para la resolución de un problema. Así tenemos que algunos modelos de la geometría hiperbólica, por ejemplo, son ampliamente utilizados en campos como análisis, aritmética, geometría diferencial y hasta en la solución de problemas específicos de la geometría euclidiana.

5. En la enseñanza.

Desde el punto de vista pedagógico, los modelos geométricos ofrecen un atractivo material educativo que permite a los estudiantes no sólo adquirir conocimientos geométricos, sino también desarrollar habilidades de pensamiento.

En el siguiente capítulo de este trabajo, analizaremos las propiedades de un modelo geométrico de la geometría esférica, denominado *Plano Radial*, el cual ha sido presentado por James Boone en su artículo *Tres Modelos Geométricos*, como un ambiente de aprendizaje que brinda novedosas y útiles experiencias.

CAPÍTULO II

EL MODELO DEL PLANO RADIAL, $\mathcal{C}$

Introducción

Este segundo capítulo está dedicado a la descripción y análisis del modelo geométrico denominado Plano Radial.

James R. Boone, profesor de Matemática de la Universidad de Texas, ha presentado este modelo en diversas publicaciones ([Boone (1993)], [Boone (1994)]) como un ambiente que ofrece enriquecedoras oportunidades de aprendizaje.

El Plano Radial es también denotado por el símbolo ***C***, puesto que esta geometría es generada por la intersección de planos con la superficie cónica en el espacio tridimensional. Así cada recta en este modelo, concepto que definiremos posteriormente, es la intersección de un cono y un plano que contiene el vértice del cono (Fig.2.1).

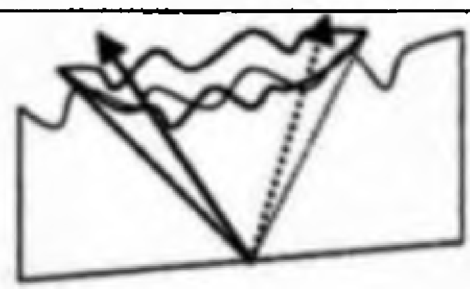


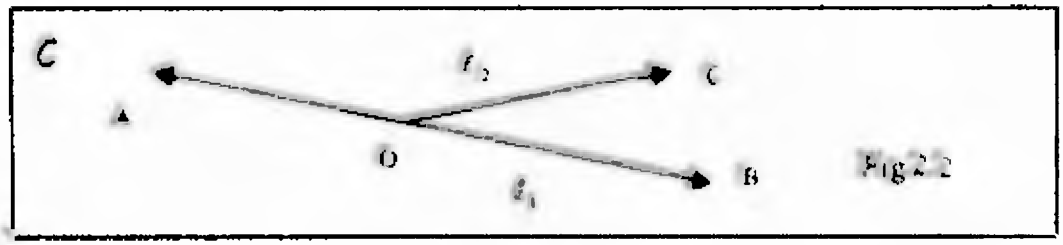
Fig. 2.1

En el estudio de las principales propiedades que presenta el modelo del Plano Radial utilizaremos los Postulados de Birkhoff, los cuales fueron creados como un sistema alternativo al de los Axiomas de Hilbert. Los Postulados de Birkhoff descansan sobre el concepto de medida y por su sencillez permiten un mejor entendimiento de la geometría, según E. Moise y otros [Moise, E. y Downs, F. (1972)].

2.1 Descripción del Plano Radial, *C*

Definición : El espacio de puntos de *C* será el plano cartesiano E^2

Definición : Una *línea recta* en *C* o *recta radial* será la unión de dos rayos distintos arbitrarios con origen común O (Fig. 2.2).



En la figura 2.2 los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ forman la línea $\overleftrightarrow{AB}$ (o ℓ_1) de *C* y los rayos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$ forman la línea $\overleftrightarrow{AC}$ (o ℓ_2) de *C*.

Definición : Sean A, B dos puntos del plano radial *C*. La distancia de A a B en *C*, que se denotará por d(A,B), se define así :

i) Si A, B están sobre un mismo rayo con origen común O, entonces

$d(A, B) = d_u(A, B)$ donde $d_u(A, B)$ denota la distancia usual euclidiana (Fig. 2.3)

ii) Si A, B están sobre rayos distintos con origen común O, entonces

$d(A, B) = d_u(A, O) + d_u(O, B)$ (Fig. 2.3)

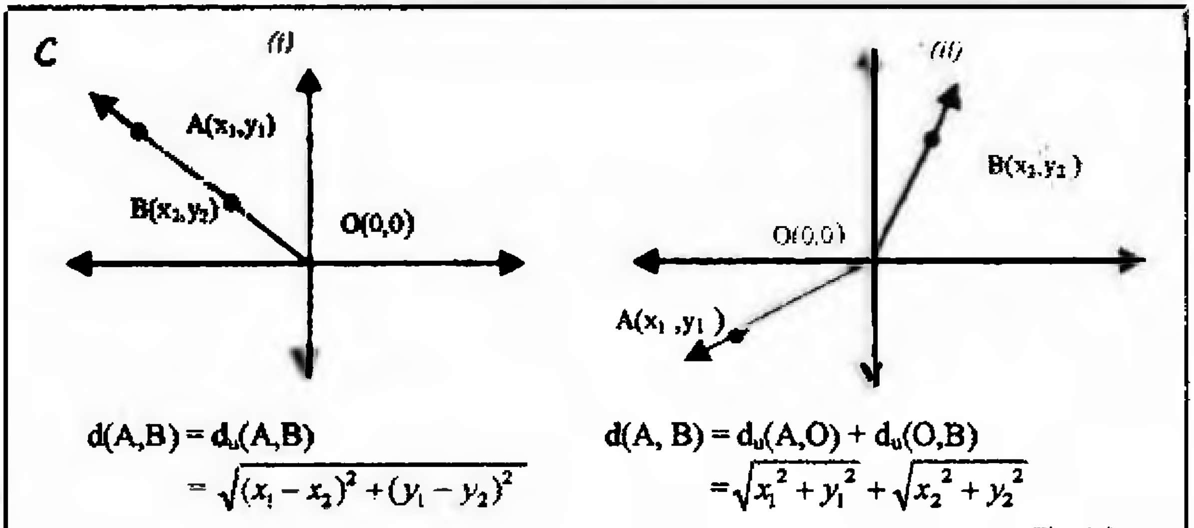


Fig. 2.3

Definición: Llamaremos *segmento radial* a una porción de recta radial que tiene un punto inicial y un punto final (Fig. 2.4).

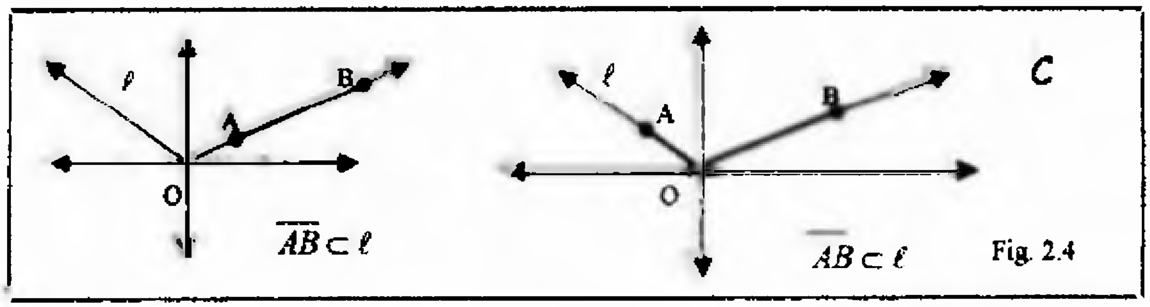


Fig. 2.4

Definición: Llamaremos *rayo radial* a una porción de recta radial que tiene un punto inicial que llamaremos *origen* (Fig. 2.5).

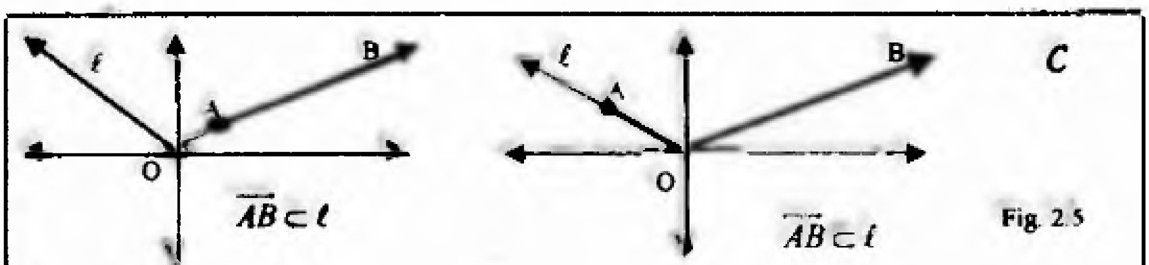


Fig. 2.5

Definición : Un *ángulo* es la unión de dos rayos no colineales con origen común (Fig.2.6). Es decir, el ángulo $\angle ABC$ del modelo del Plano Radial es la unión de los rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$, cuyo vértice es el punto B.

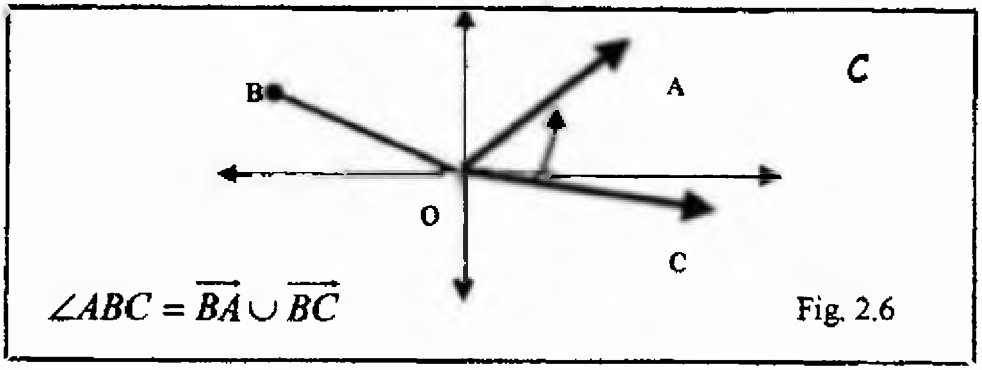


Fig. 2.6

Nótese que el punto O está entre B y A (similarmente O está entre B y C). Además, ningún ángulo tiene al origen O como su vértice, puesto que los ángulos son la unión de rayos no colineales.

Definición : Sea $\angle$ABC un ángulo cualquiera en $\boldsymbol{C}$. La medida del $\angle$ABC en $\boldsymbol{C}$, que denotaremos por m$\angle$ABC es la medida usual $m_u\angle$AOC del plano euclidiano. Así :

i) m$\angle$ABC = m_u $\angle$AOC siempre que B no pertenezca al interior usual del $\angle$AOC

ii) m$\angle$ABC = 360 - $m_u\angle$AOC si B $\in$ $Int_u\angle$AOC

iii) m$\angle$ABC = 180 si $m_u\angle$AOC = 180 (Fig. 2.7)

Así podemos notar que la medida angular r en el modelo $\boldsymbol{C}$ es $0 < r < 360$.

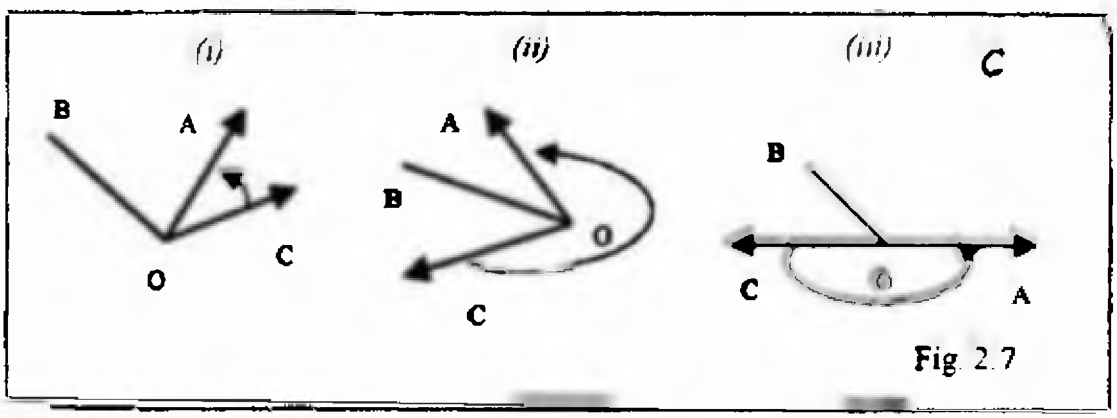


Fig. 2.7

2.2 Postulados de Birkhoff en el Modelo del Plano Radial, $\mathcal{C}$

A continuación analizaremos cuáles postulados de Birkhoff se satisfacen o no en el modelo del Plano Radial. Para ello consideraremos cuidadosamente las definiciones anteriores y justificaremos el cumplimiento o no de un determinado axioma en el modelo $\mathcal{C}$, presentando respectivamente una demostración o un contraejemplo.

Postulado 1 : Dados dos puntos distintos, existe una única recta que los contiene.

¿En el Modelo del Plano Radial, dos puntos determinan una única recta ?

Sean A(-2, 1) y B(-6, 3) dos puntos de $\mathcal{C}$ que pertenecen al mismo rayo $\overrightarrow{OB}$. Tomemos el punto P(4, 2) de $\mathcal{C}$, el cual no pertenece a $\overrightarrow{OB}$. Formemos el rayo $\overrightarrow{OP}$ de $\mathcal{C}$. Así, $\overrightarrow{OB} \cup \overrightarrow{OP}$ forman una línea en el Plano Radial, que llamaremos ℓ_1.

Ahora tomemos el punto R(1, -2) y formemos el rayo $\overrightarrow{OR}$. Al unir los rayos $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OR}$ obtenemos una recta en $\mathcal{C}$ que llamaremos ℓ_2 (Fig. 2.8).

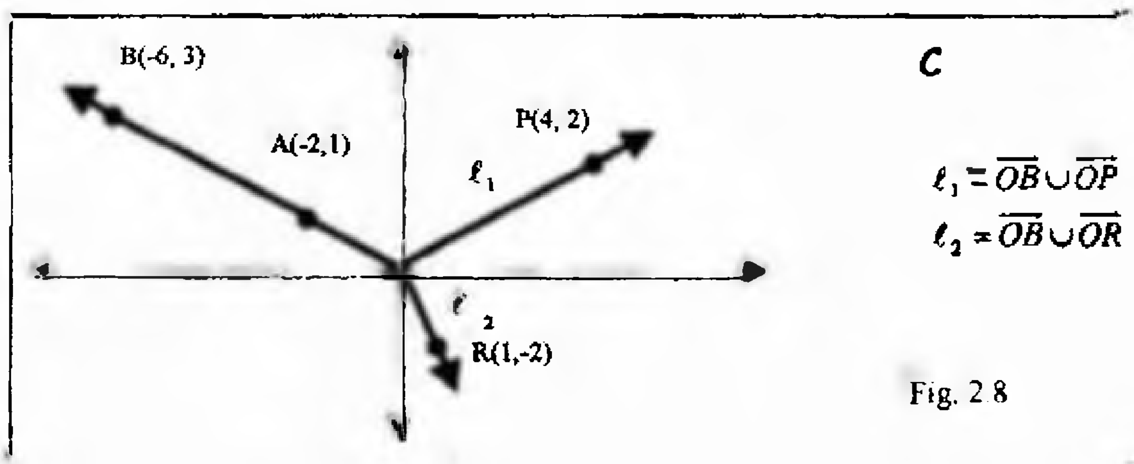


Fig. 2.8

Luego, por los puntos A y B pasan al menos dos rectas distintas del Plano Radial, ℓ_1 y ℓ_2. Esto nos lleva a concluir que el Postulado 1 de Birkhoff no se verifica en el modelo del Plano Radial.

Postulado 2 (Postulado de la Distancia): Dados dos puntos distintos, a éstos les corresponde un único número real positivo.

Este postulado se verifica en el modelo del Plano Radial, puesto que es consecuencia de la definición de distancia en este modelo. Es decir, si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos en $\boldsymbol{C}$ y:

i) Si A y B están sobre un mismo rayo con origen O, entonces la distancia *d* en el Plano Radial de A a B está dada por

$$d(A, B) = d_u(A, B)$$ donde $d_u(A,B)$ es la distancia usual euclidiana

ii) Si A y B están en diferentes rayos con origen O, entonces

$$d(A, B) = d_u(A, O) + d_u(O, B)$$

La unicidad de d(A,B) es consecuencia de la unicidad de la distancia usual euclidiana.

Postulado 3 (Postulado de la Regla): Es posible establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales, tal que:

i) A cada punto de la recta le corresponde un número real.

ii) A cada número real corresponda exactamente un punto de la recta.

iii) La distancia entre dos puntos es un número real mayor o igual que cero.

El Postulado de la Regla será analizado en nuestro tercer capítulo, puesto que lo emplearemos para ilustrar las ideas relacionadas con la *resolución de problemas*. Sin embargo, en la medida en que se necesite este resultado, nos permitiremos utilizarlo con la seguridad de que todos los aspectos que éste involucra serán atendidos en el siguiente capítulo.

Postulado 4: Dados dos puntos podemos escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenada del primero sea cero y la coordenada del segundo sea un número real positivo.

A continuación demostraremos que el Postulado 4 se satisface en el Plano Radial.

Sean $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ dos puntos distintos del Plano Radial. Consideremos

la aplicación
$$\begin{aligned} &\Psi : \Re^2 \to \Re^+ \\ &X \to \Psi(X) = d(P, X) \end{aligned}$$

Puesto que d está bien definida, Ψ también está bien definida.

Sea f la función definida en el Postulado 3, así tenemos

$$\begin{aligned} \Psi(P) &= d(P,P) \\ &= d_u(P,P) \\ &= |f(P) - f(P)| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Consideremos ahora el punto $Q(x_2, y_2)$. En el Plano Radial ocurren dos posibilidades:

1) Que P y Q estén sobre un mismo rayo de origen O.

$$\Psi(Q) = d(P,Q)$$

$$= d_u(P,Q)$$

$$= |f(Q) - f(P)| = |f(P) - f(Q)|$$

≥ 0 como se ha probado en la parte (iii) del Post. de la Regla

2) Que P y Q estén en rayos diferentes de origen común O.

$$\Psi(Q) = d(P,Q)$$

$$= d_u(P,O) + d_u(O,Q)$$

≥ 0 como se ha demostrado en el Post. de la Regla

Postulado 5 (Axioma de Separación del Plano): Dada una recta en el plano, los puntos del plano que no están en la recta forman dos conjuntos convexos y tales que si un punto está en un conjunto y el otro punto está en el otro conjunto, entonces el segmento que los une cortará a la recta.

Sea ℓ una recta del Plano Radial. La línea ℓ divide a C en dos conjuntos disjuntos que llamaremos C_1 y C_2 (Fig. 2.9).

Fig. 2.9

¿ Son los conjuntos C_1 y C_2 convexos ?

Tomemos dos puntos arbitrarios, A y B de C_1. Para que C_1 sea convexo se debe cumplir que al unir los puntos A y B, el segmento $\overline{AB}$ deberá quedar totalmente contenido en C_1.

Unamos entonces los puntos arbitrarios A y B de C_1, atendiendo las características de los elementos en el modelo del Plano Radial (Fig. 2.10)

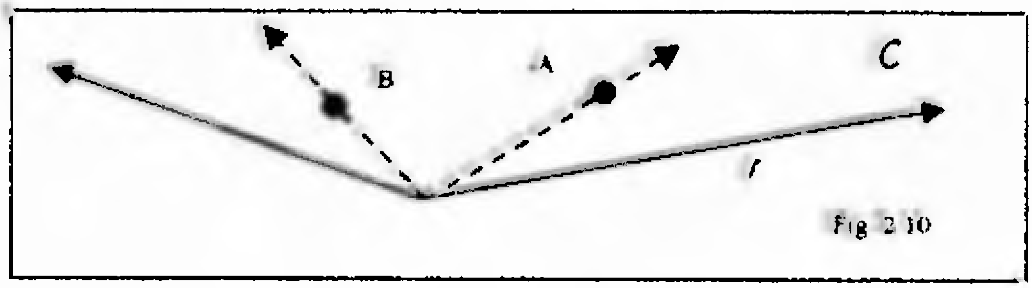


Fig 2.10

Consideremos el caso en que A y B no pertenencen a un mismo rayo de origen O. Es decir que si unimos los puntos A y O, y luego unimos los puntos O y B, se forman los rayos distintos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. Así, $\overline{AB}$ es un segmento que contiene al punto O. Pero O no pertenece a C_1, y por tanto $\overline{AB} \not\subset C_1$. Luego, hemos encontrado un contraejemplo que prueba que C_1 no es convexo.

Puesto que falla la convexidad, se concluye que el Postulado 5 (Axioma de Separación del Plano) no se verifica en el modelo del Plano Radial.

A continuación analizaremos el Postulado 6 de Birkhoff, el cual establece lo siguiente: *A cada ángulo le corresponde un número real entre cero y 180.*

Este postulado presenta estrecha relación con la definición de medida angular. Y de la definición de medida angular en el modelo del Plano Radial, se infiere la posibilidad de construir ángulos cuya medida angular r esté entre 0 y 360.

Dadas las particularidades del modelo del Plano Radial, en nuestro análisis modificaremos el enunciado de este postulado, adaptándolo a la definición de medida angular en el modelo ***C***. Cabe señalar que esta modificación no afecta la esencia de los postulados de Birkhoff, puesto que el propósito del Postulado 6 es establecer un rango para la magnitud de los ángulos.

Postulado 6: A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 360.

Veremos que este postulado es verificable en el modelo ***C***.

Sea $\angle ABC$ un ángulo en el Plano Radial. Si

i) $B \notin Int_u \angle AOC$ se tiene

$m\angle ABC = m_u \angle AOC$ — definición de medida angular en ***C***

ii) $B \in Int_u \angle AOC$,

$m\angle ABC = 360 - m_u \angle AOC$ — definición de medida angular en ***C***

iii) $m_u \angle AOC = 180 \Rightarrow m\angle ABC = 180$ — definición de medida angular en ***C***

Puesto que a la medida angular usual del plano euclidiano le corresponde un número real entre 0 y 180, de las partes (i) y (iii) se tiene que la medida angular r de $\angle ABC$ en ***C*** es $0 < r \leq 180$. Y de la parte (ii) se deduce que $180 < r < 360$. Por tanto, como consecuencia inmediata de la definición de medida angular en el modelo del Plano Radial, a cada ángulo en ***C*** le corresponderá un número real entre 0 y 360.

El siguiente postulado de Birkhoff (Postulado 7), llamado también Axioma de la Construcción del Ángulo establece: *Dado un rayo y uno de los semiplanos en el que se divide el plano por este rayo. Para cada número real entre 0 y 180, existe un único rayo en el semiplano tal que la medida del ángulo formado por estos rayos es igual a r.*

En el Plano Radial, la definición dada de medida angular nos permite tener el ángulo llano (ángulo de 180) y ángulos mayores de 180, por lo cual el Axioma de la Construcción del Ángulo ha sido adaptado a las características del modelo *C*, como sigue:

Postulado 7 (Axioma de la Construcción del Ángulo): Dado un rayo y un número real *r* entre 0 y 360, existe un único rayo tal que la medida del ángulo formado por estos rayos es igual a *r*.

Probaremos que este postulado se satisface en *C*.

Sea $\overrightarrow{BA}$ un rayo, que pasa por O, en el Plano Radial. Sea *r* un número real entre 0 y 360. Podemos considerar que la recta $\overleftrightarrow{BA}$ de *C* (que contiene al rayo $\overrightarrow{BA}$) forma el ángulo euclidiano ∠AOB (Fig. 2.11)

Fig 2.11

Queremos construir el ángulo ∠ABC en *C* tal que m∠ABC = *r* Tenemos las siguientes posibilidades:

i) $0 < r < 180$

ii) $180 < r < 360$

iii) $r = 180$

i) Supongamos que el número real r está entre 0 y 180. Pueden presentarse los siguientes casos:

a) $r < m_u\angle BOA$

b) $r \geq m_u\angle BOA$

a) Si $r < m_u\angle BOA$ el vértice B no pertenecerá al interior usual del $\angle AOC$ a construir, y por definición de medida angular en el Plano Radial tenemos

$m\angle ABC = m_u\angle AOC$

Luego nuestra demostración se reduce a construir el ángulo euclidiano $\angle AOC$ de medida angular r. Consideremos, sin pérdida de generalidad, el semiplano inferior en que la recta euclidiana $\overleftrightarrow{OA}$ divide al plano euclidiano.

Ahora bien, dado el rayo $\overrightarrow{OA}$ y el número r, en el plano euclidiano existe un único rayo $\overrightarrow{OC}$ (con C en el semiplano inferior) tal que $m_u\angle AOC = r$ (Fig. 2.12).

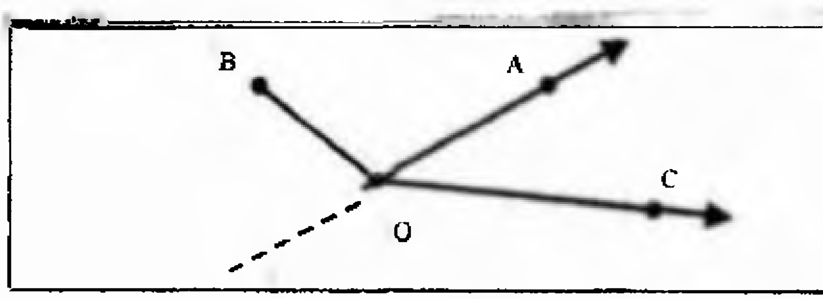


Fig. 2.12

Por tanto, el rayo $\overrightarrow{BC}$ del Plano Radial que forma con $\overrightarrow{BA}$ el ángulo $\angle ABC$ en C de medida angular r, está determinado por el segmento $\overline{BO}$ y el rayo euclidiano $\overrightarrow{OC}$.

b) Si $r \geq m_u\angle BOA$ $(0 < r < 180)$

b.1) Si $r > m_u\angle BOA$, tenemos por definición de medida angular en C, que el vértice B no puede pertenecer al interior usual del ángulo euclidiano $\angle AOC$ (a construir) y entonces $m\angle ABC = m_u\angle AOC$.

La recta $\overleftrightarrow{OA}$ divide al plano euclidiano en dos semiplanos, uno de los cuales contiene al vértice B. Nuestra demostración consiste en construir el ángulo euclidiano $\angle AOC$, eligiendo el semiplano en el cual no se encuentre B. Consideremos que éste es el semiplano inferior. Así, dado el número r y el rayo $\overrightarrow{OA}$ en el plano euclidiano existe un único rayo $\overrightarrow{OC}$ (con C en el semiplano inferior) tal que $m_u\angle AOC = r$ (Fig. 2.13).

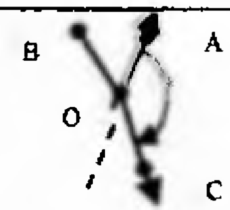


Fig. 2.13

b.2) En el caso en que $r = m_u\angle BOA$, $(0 < r < 180)$ también debemos elegir el semiplano en que no se encuentre el punto B. Pues, no podemos construir el rayo $\overrightarrow{OC}$ de tal forma que $\overline{BO}$ pertenezca a $\overline{OC}$ puesto que, atendiendo a la definición de ángulo en el Plano Radial, se tiene que un ángulo es la unión de dos rayos no colineales.

ii) Supongamos que $180 < r < 360$. Tenemos en este caso que B sí pertenecerá al interior usual del ángulo euclidiano $\angle AOC$, por definición. Así,

$$m\angle ABC = 360 - m_u\angle AOC$$

o sea $$r = 360 - m_u\angle AOC$$

$$\Rightarrow \quad m_u\angle AOC = 360 - r$$

Ahora nuestra demostración consiste en construir el ángulo euclidiano $\angle AOC$ de medida angular $\lambda = 360 - r$ tal que B pertenezca al interior usual del $\angle AOC$.

Ahora bien, dado el rayo $\overrightarrow{OA}$ y el número λ, en el plano euclidiano existe un único rayo $\overrightarrow{OC}$ tal que $m_u\angle AOC = \lambda$ (puesto que $0 < \lambda < 180$). Así el rayo $\overrightarrow{BC}$ de $\mathcal{C}$ que forma con $\overrightarrow{BA}$ el ángulo $\angle ABC$ en el Plano Radial, de medida angular r, está determinado por $\overrightarrow{BO}$ y el rayo euclidiano $\overrightarrow{OC}$ (Fig. 2.14).

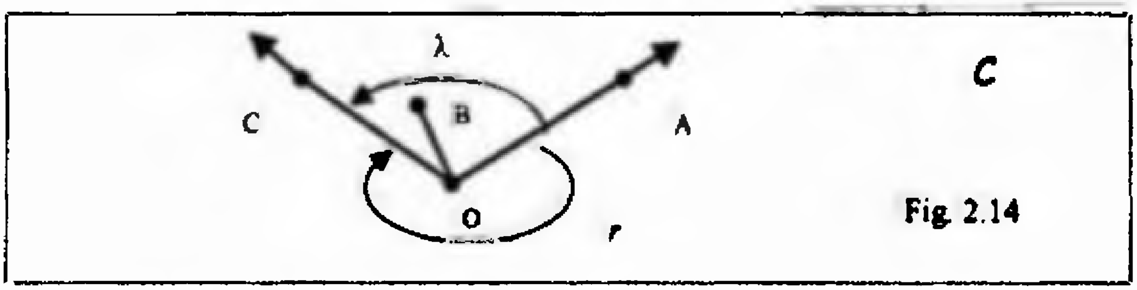


Fig. 2.14

iii) Si $r = 180$, por definición de medida angular en el Plano Radial, tenemos

$$m\angle ABC = 180 \qquad \text{si } m_u\angle AOC = 180$$

La prueba consiste en construir el ángulo euclidiano $\angle AOC$ de medida angular r=180. Puesto que en el plano euclidiano se verifica el postulado que nos permite construir ángulos llanos (Postulado del Suplemento, al cual nos referiremos posteriormente), entonces podemos construir el rayo único $\overrightarrow{OC}$ (colineal con $\overrightarrow{OA}$) tal que $m_u\angle AOC = 180$. Así, por definición de medida angular en $\mathcal{C}$, se tiene que $m\angle ABC = 180$.

Observación: Dado el rayo $\overrightarrow{BA}$ en $\mathcal{C}$, que pasa por O, se tiene que la recta euclidiana $\overleftrightarrow{OA}$ divide al plano euclidiano en dos semiplanos. Puede suceder que el punto B: a) Se encuentre en el semiplano superior

b) Se encuentre en el semiplano inferior

c) Pertenezca a $\overleftrightarrow{OA}$ (Fig. 2.15)

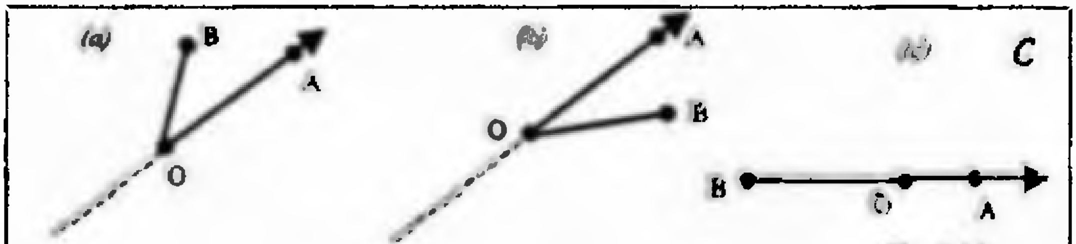


Fig. 2.15

En los casos (a) y (b) debemos elegir el semiplano euclidiano que no contenga al punto B, atendiendo a la definición de medida angular en $\mathcal{C}$. En el caso (c) no es posible la construcción del ángulo llano en el Plano Radial, puesto que se contradice la definición de ángulo en $\mathcal{C}$. Es decir, como ángulo es la unión de rayos no colineales con origen común, se tendría que el rayo $\overrightarrow{OC}$ a construir sería colineal con $\overrightarrow{BA}$.

Con las partes (i), (ii) y (iii) queda probado que el Axioma de la Construcción del Ángulo se verifica en el Plano Radial.

En el análisis del Postulado 8 utilizaremos la siguiente definición.

Definición: Sea E un plano y $\angle$BAC un ángulo en este plano. El *interior* del $\angle$BAC es la intersección del semiplano del lado de $\overleftrightarrow{AC}$ que contiene a B, con el semiplano del lado de $\overleftrightarrow{AB}$ que contiene al punto C (Fig. 2.16).

El *exterior* del ángulo $\angle$BAC es el conjunto de todos los puntos que no quedan ni en el ángulo ni en su interior.

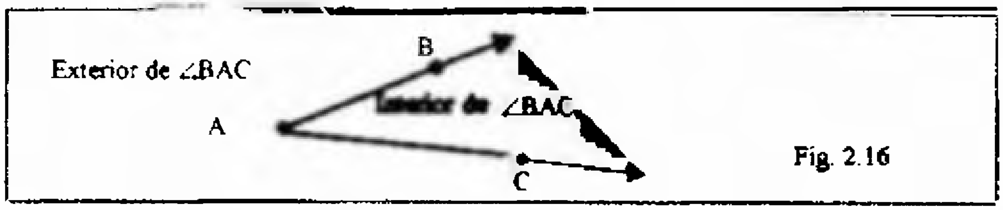


Fig. 2.16

Postulado 8: Si P es un punto en el interior del ángulo $\angle ABC$ entonces:

$m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$

Este postulado, vinculado al concepto de medida angular, es verificable en el Plano Radial. A continuación se presenta la demostración de que efectivamente se cumple en $\mathcal{C}$.

Sea $\angle ABC$ un ángulo en el Plano Radial y P un punto en el interior de $\angle ABC$ (Fig. 2.17).

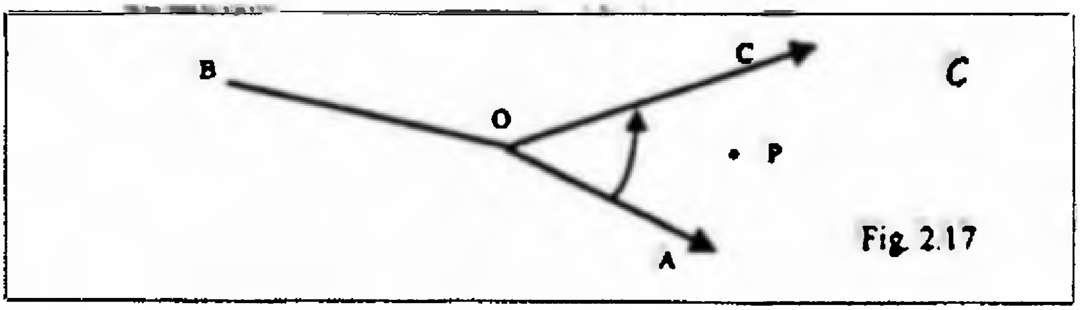


Fig. 2.17

Por la definición de medida angular m en $\mathcal{C}$, tenemos dos casos a considerar:

i) Supongamos que $B \notin Int_u\angle AOC$ (Fig. 2.18).

Por demostrar: $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$

$m\angle ABC = m_u\angle AOC$ definición de medida angular en el Plano Radial

$= m_u\angle AOP + m_u\angle POC$ Axioma de Adición de Ángulos en E^2, siendo $P \in Int_u\angle AOC$

$= m\angle ABP + m\angle PAC$ definición de medida angular en $\mathcal{C}$

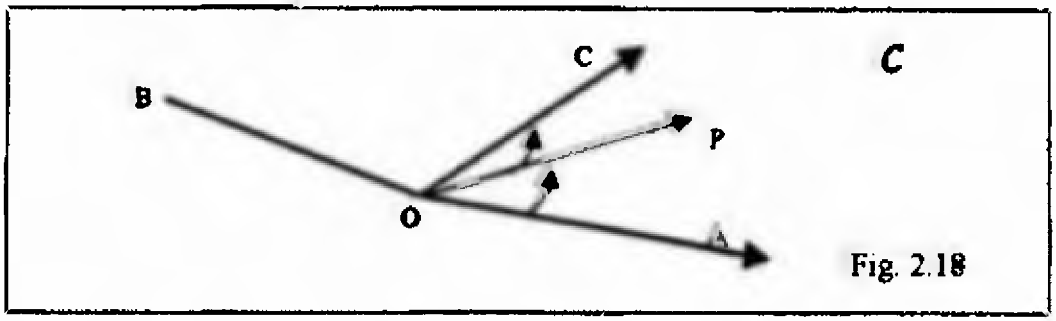


Fig. 2.18

ii) Supongamos que $B \in Int_u\angle AOC$ (Fig. 219).

Por demostrar: $m\angle ABC = m\angle ABP + m\angle PBC$

$m\angle ABC = 360 - m_u\angle AOC$ definición de medida angular en $\mathcal{C}$

$= 360 - (m_u\angle AOB + m_u\angle BOC)$ Axioma de Adición de Ángulos en E^2

$= 360 - [360 - (m_u\angle AOP + m_u\angle POC)]$ Axioma de Sustracción de Ángulos en E^2

$= m_u\angle AOP + m_u\angle POC$ Cancelación de términos semejantes y eliminando paréntesis

$= m\angle ABP + m\angle PBC$ definición de medida angular en $\mathcal{C}$

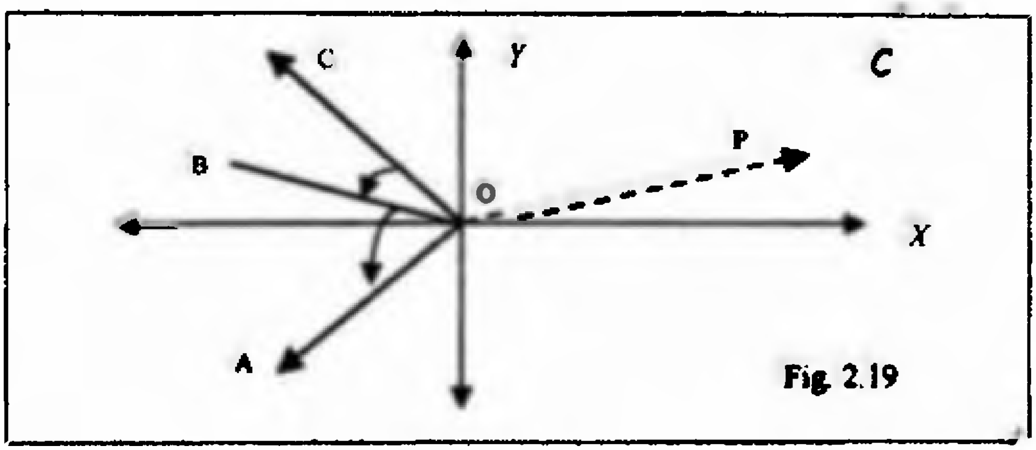


Fig. 2.19

El postulado de Birkhoff que sigue en nuestro análisis establece:

Postulado 9 (Postulado del Suplemento): Si dos ángulos forman un par lineal, entonces son suplementarios.

La razón de ser del Postulado del Suplemento en la geometría euclidiana es la de poder generar, a través de la suma de dos ángulos, un nuevo ángulo: el ángulo llano (ángulo de 180). Sin embargo, en el modelo del Plano Radial este ángulo ya existe a través de la definición de ángulo, por lo cual resulta irrelevante probar la verificación del Postulado 9 en el modelo $\mathcal{C}$.

Postulado 10 (Criterio de Congruencia Lado-Ángulo-Lado): Si un triángulo tiene dos lados y el ángulo comprendido congruentes a los correspondientes elementos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

El análisis de este postulado requiere recordar que un triángulo en la geometría euclidiana es la unión de tres segmentos cuyos puntos extremos no son colineales; es decir, dados A, B y C tres puntos no colineales, entonces la unión de los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se llama *triángulo*. Los tres segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se denominan *lados* del triángulo y los puntos A, B y C sus *vértices*. Denotaremos un triángulo por ΔABC (Fig. 2.20).

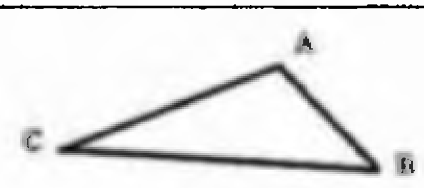


Fig. 2.20

Sin embargo, en el modelo del Plano Radial los triángulos tienen una forma muy diferente a la del triángulo euclidiano. Así se hace necesario presentar la siguiente definición.

Definición: Llamaremos *triángulo radial* a la unión de tres segmentos radiales que pasen por O (Fig. 2.21).

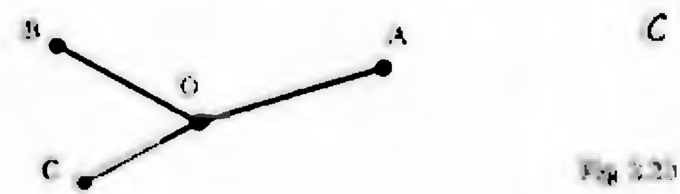


Fig 2.21

Principio Fundamental de Congruencia: Dos triángulos son congruentes si sus tres lados correspondientes y sus tres ángulos correspondientes son congruentes (Fig. 2.22).

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\overline{BC} \cong \overline{EF}$; $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\angle A \cong \angle D$; $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

si y sólo si $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

Fig 2.22

Veremos ahora que el Postulado 10 de Birkohff no se cumple en este modelo.

Sean ΔABC y $\Delta A'B'C'$ dos triángulos del Plano Radial de vértices:

$A(1,\sqrt{3})$, $B(-4, 0)$, $C(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y

$A'\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$, $B'(0, -5)$, $C'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (Fig. 2.23)

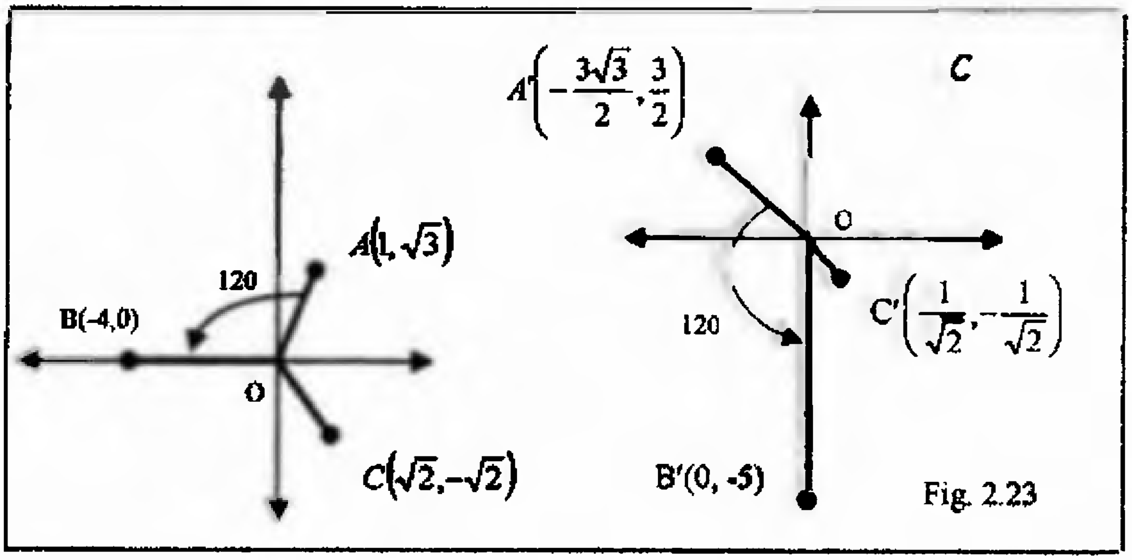


Fig. 2.23

Los triángulos ΔABC y ΔA'B'C' de *C* cumplen que

$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'} = 6$$
$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'} = 4$$
$$\angle BCA \cong \angle B'C'A' = 120$$

Sin embargo, estos triángulos no satisfacen el Criterio de Congruencia Lado-Ángulo-Lado puesto que:

$$\overline{AB} = 6 \quad \text{y} \quad \overline{A'B'} = 8$$

Además $\quad \text{m}\angle ABC \simeq 105 \;, \quad \text{m}\angle A'B'C' = 195$

$$\text{m}\angle CAB = 135 \;, \quad \text{m}\angle C'A'B' = 45$$

Por tanto, el anterior contraejemplo prueba que el Postulado 10 no se verifica en el Plano Radial.

Postulado 11: Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a la recta dada.

Recordemos que una línea recta en el Plano Radial está definida como la unión de dos rayos distintos con vértice común. Consideremos este vértice común como el punto O(0,0) del plano cartesiano, llamado *origen*. Ahora bien, por definición se tiene que todas las líneas en ***C*** se intersectan al menos en el punto O(0,0) y por tanto en el Plano Radial no existen líneas paralelas (Fig. 2.24).

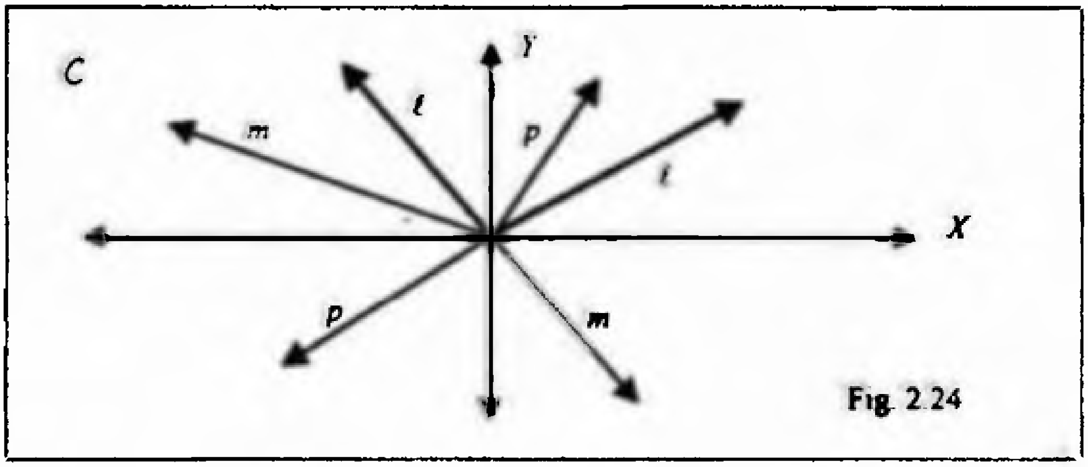


Fig. 2.24

2.3 Propiedades de los Triángulos en *C*

En la presente sección analizaremos algunas propiedades importantes de los triángulos en el modelo del Plano Radial.

2.3.1 Suma de los Ángulos Internos.

En la geometría euclidiana la suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos. En el modelo del Plano Radial, hemos notado que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es mayor de 180 (ver *suma de medida angular* en Postulado Lado-Ángulo-Lado), lo cual nos conduce a presentar la prueba formal de este resultado: *La suma de los ángulos internos de todo triángulo radial es 360.*

Para la demostración utilizaremos la siguiente construcción auxiliar:

Sea ΔABC un triángulo cualquiera en $\mathcal{C}$. Construyamos el rayo $\overrightarrow{OX}$ tal que

$m_u\angle XOC = 180$ y $m_u\angle COX = 180$ (Fig. 2.25)

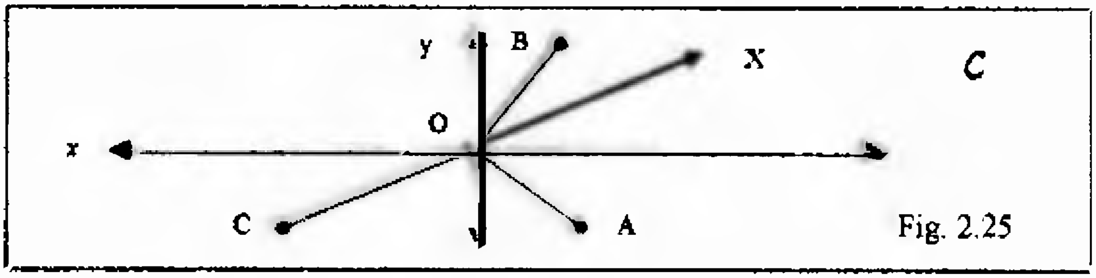


Fig. 2.25

Por demostrar: $m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle CAB = 360$

$m\angle ABC + m\angle BCA + m\angle CAB$ =

$= m_u\angle AOC + m_u\angle BOA + m_u\angle COB$ definición de medida angular en $\mathcal{C}$

$= m_u\angle AOC + m_u\angle XOA + m_u\angle BOX + m_u\angle COB$ suma de ángulos en el plano cartesiano E^2, puesto que $X \in Int_u\angle BOA$

$= m_u\angle XOC + m_u\angle COX$ suma de ángulos en E^2

$= 180 + 180$ por construcción

$= 360$ sumando

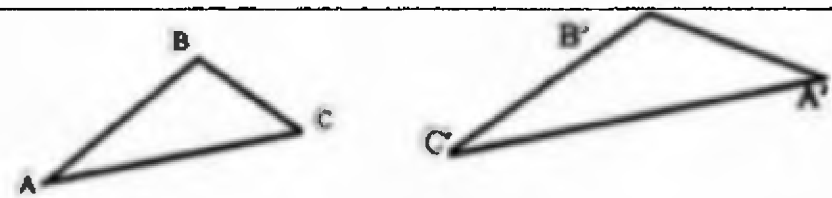
Por tanto, queda demostrado que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo radial es igual a 360.

2.3.2 Semejanza

Principio Fundamental de Semejanza de Triángulos: Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos correspondientes son congruentes y sus tres lados correspondientes son proporcionales.

A continuación consideraremos los criterios Ángulo-Ángulo-Ángulo (A-A-A), Lado-Lado-Lado (L-L-L) y Lado-Ángulo-Lado (L-A-L) de semejanza de triángulos en el modelo del Plano Radial.

Criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo (A-A-A): Si dos triángulos cualesquiera ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tienen sus tres ángulos correspondientes congruentes, entonces son semejantes (Fig. 2.26).



Si $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$, $\angle C \cong \angle C'$

$\Rightarrow \quad \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Fig. 2.26

Construiremos dos triángulos en C que cumplan la condición de tener sus tres ángulos correspondientes congruentes.

Sea ΔABC el triángulo en C de vértices

$A(5,0)$, $B\left(-4,4\sqrt{3}\right)$, y $C\left(-3\sqrt{3},-3\right)$

Sea $\Delta A'B'C'$ el triángulo en C de vértices

$A'(2,0)$, $B'\left(-1,\sqrt{3}\right)$, y $C'\left(-2\sqrt{3},-2\right)$ (Fig. 2.27)

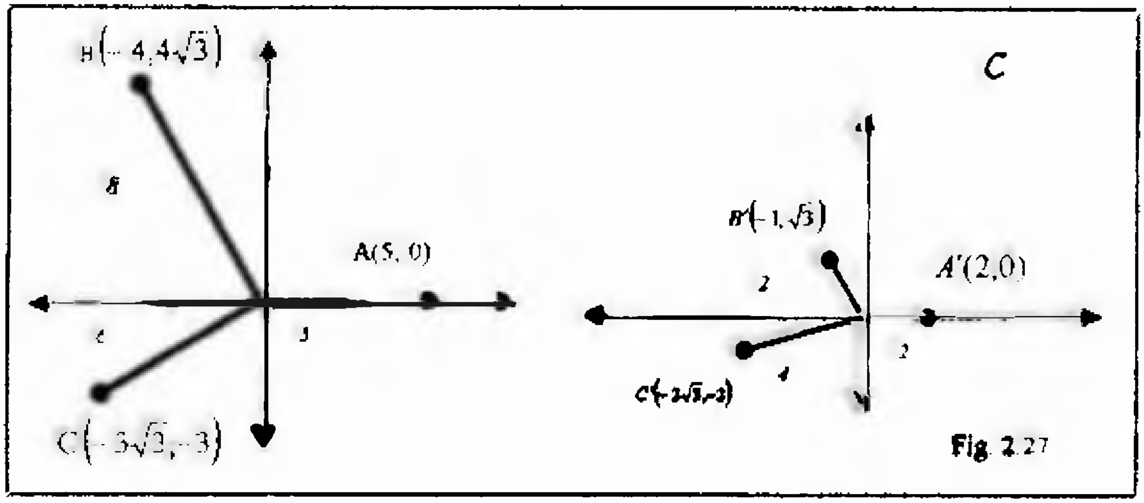


Fig. 2.27

Estos triángulos ΔABC y ΔA'B'C' en *C* tienen sus ángulos correspondientes congruentes, pues:

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C' = 150$$
$$\angle BCA \cong \angle B'C'A' = 120$$
$$\angle CAB \cong \angle C'A'B' = 90$$

Sin embargo, sus lados correspondientes no son proporcionales:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{13}{4}\,, \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{14}{6}\,, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{11}{6}$$

Por tanto, los triángulos en *C*, ΔABC y ΔA'B'C', no son semejantes y ello prueba que el Criterio Ángulo-Ángulo-Ángulo de semejanza no se verifica en el Plano Radial.

Criterio Lado-Lado-Lado: Si dos triángulos cualesquiera ΔABC y ΔA'B'C' tienen sus tres lados correspondientes proporcionales, entonces son semejantes (Fig.2.28).

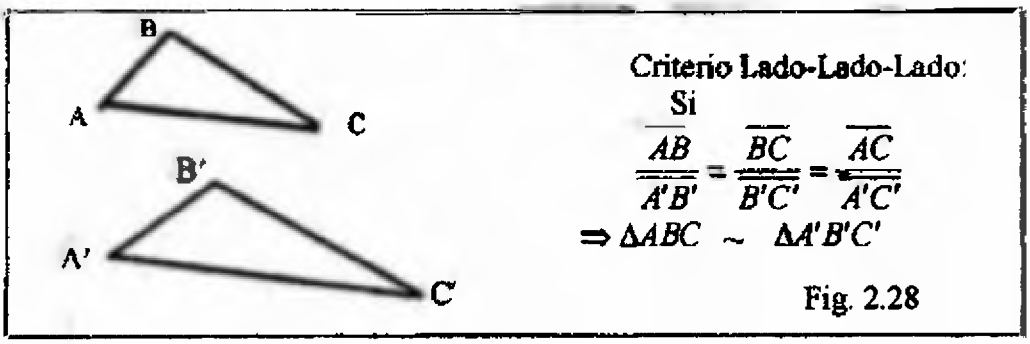


Fig. 2.28

Sea ΔABC el triángulo en *C* de vértices

$$A(3,0), \qquad B(0,4) \quad y \quad C\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$$

Sea $\Delta A'B'C'$ el triángulo en *C* de vértices

$$A'(6,0), \qquad B'(-8,0) \ y \quad C'\left(-2\sqrt{3},-2\right) \qquad \text{(Fig. 2.29)}$$

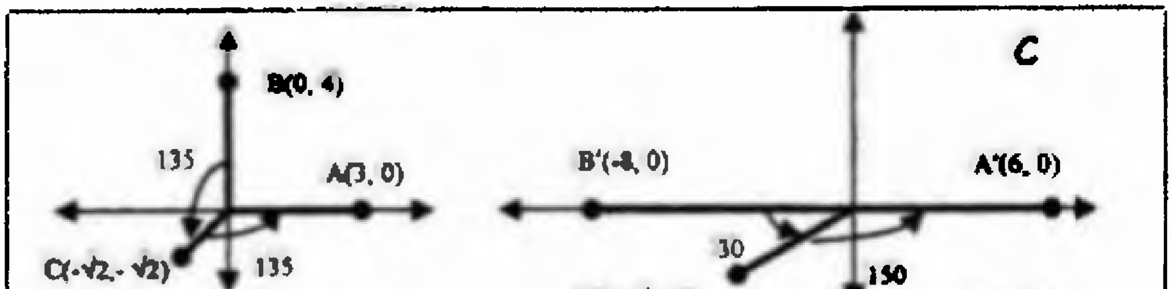


Fig. 2.29

Los lados de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ en *C* son proporcionales:

$$\overline{AB}=7 \qquad \overline{A'B'}=14$$
$$\overline{BC}=6 \qquad \overline{B'C'}=12$$
$$\overline{AC}=5 \qquad \overline{A'C'}=10$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}=\frac{1}{2}$$

Pero estos triángulos en *C*, ΔABC y $\Delta A'B'C'$, no son semejantes puesto que sus ángulos correspondientes no son congruentes, a saber:

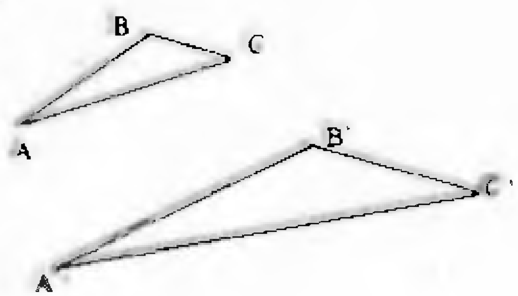
$m\angle ABC = 135 \qquad m\angle A'B'C' = 150$

$m\angle BCA = 90 \qquad m\angle B'C'A' = 180$

$m\angle CAB = 135 \qquad m\angle C'A'B' = 30$

Así, los ángulos de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ no son congruentes. Por consiguiente, el Criterio Lado-Lado-Lado de semejanza no se cumple en $\boldsymbol{C}$.

Criterio Lado-Ángulo-Lado: Si dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ tienen dos lados correspondientes proporcionales, y el correspondiente ángulo comprendido congruente, entonces son semejantes (Fig. 2.30).



Si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

y $\angle A = \angle A'$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

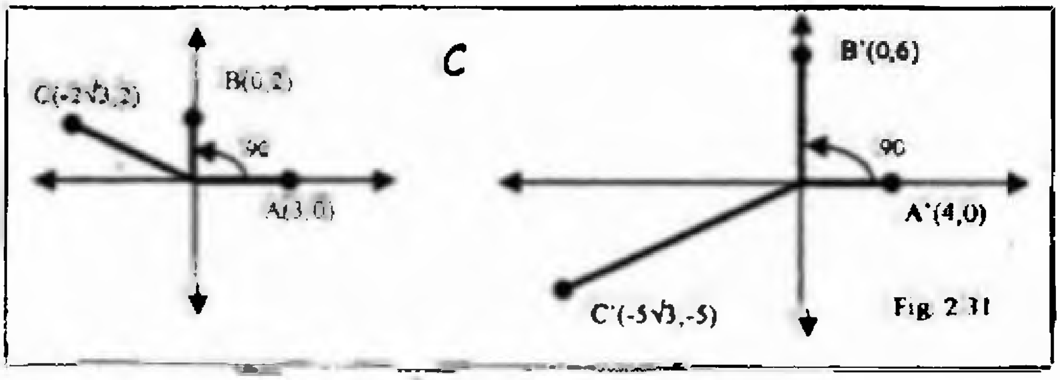
Fig. 2.30

Veamos qué pasa con este criterio en $\boldsymbol{C}$. Sea ΔABC el triángulo en el modelo del Plano Radial, de vértices

A(3, 0) , B(0, 2) y C($-2\sqrt{3}$, 2)

Sea $\Delta A'B'C'$ el triángulo en el modelo del Plano Radial, de vértices

$A'(4,0)$, $B'(0,6)$ y $C'(-5\sqrt{3},-5)$ (Fig. 2.31)



Estos triángulos de *C* verifican las condiciones de poseer un ángulo correspondiente congruente y dos lados correspondientes proporcionales, pues:

$$\angle BCA \cong \angle B'C'A' = 90$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{5}{10} \quad , \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{7}{14}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{1}{2}$$

Pero los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ de *C* no son semejantes ya que:

$$m\angle CAB = 60 \quad , \quad m\angle C'A'B' = 120$$

$$m\angle ABC = 210 \quad , \quad m\angle A'B'C' = 150$$

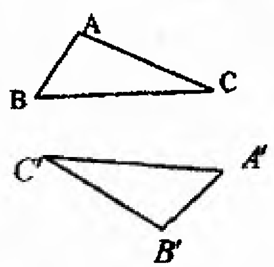
Además $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{16}$ (este par de lados correspondientes no guarda la misma proporción 1:2).

Por tanto, el Criterio Lado-Ángulo-Lado no se satisface en el modelo del Palno Radial.

2.3.3 Congruencia

Veamos qué ocurre con los criterios Lado-Lado-Lado y Ángulo-Lado-Ángulo de congruencia en el Plano Radial.

Criterio Lado-Lado-Lado: Si dos triángulos tienen sus lados correspondeintes congruentes, entonces son congruentes (Fig. 2.32).



Si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

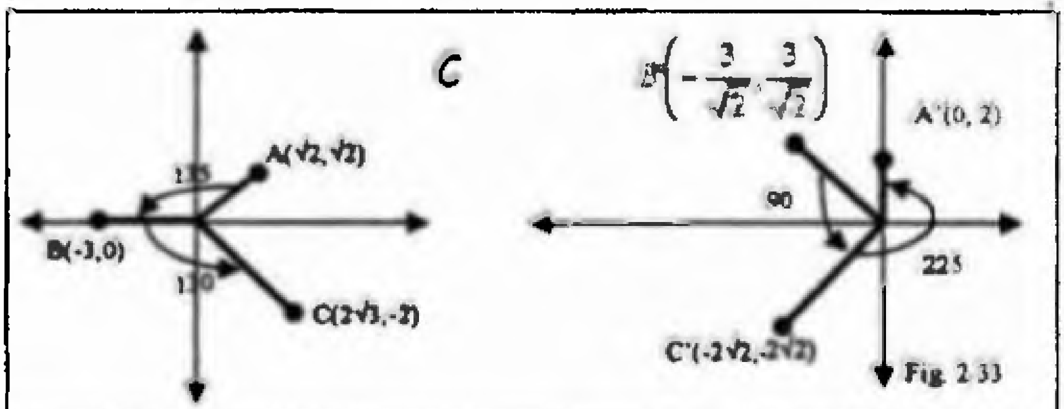
Fig. 2.32

Sean los triángulos en $\mathcal{C}$, ΔABC de vértices:

A($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$) , B(-3, 0) y C($2\sqrt{3}$, -2)

y $\Delta A'B'C'$ de vértices:

$A'(0,2)$, $B'(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$ y $C'(-2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ (Fig. 2.33)



Los lados correspondientes de estos triángulos en $\mathcal{C}$ son congruentes, pues:

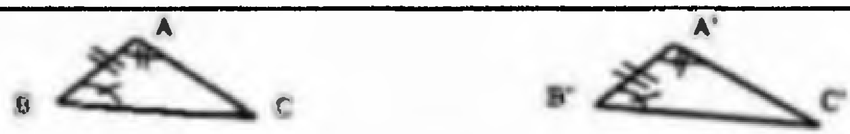
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} = 5$$
$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'} = 7$$
$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'} = 6$$

Sin embargo, los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ en $\boldsymbol{C}$ no son congruentes, puesto que sus ángulos correspondientes no son congruentes, como tenemos:

$$m\angle ABC = 95 \quad ; \quad m\angle A'B'C' = 225$$
$$m\angle BCA = 135 \quad ; \quad m\angle B'C'A' = 45$$
$$m\angle CAB = 130 \quad ; \quad m\angle C'A'B' = 90$$

De este ejemplo se sigue que el Criterio Lado-Lado-Lado de congruencia no se verifica en $\boldsymbol{C}$.

Criterio Ángulo-Lado-Ángulo: Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado comprendido respectivamente congruentes, entonces son congruentes (Fig. 2.34)



Si $\angle A \cong \angle A'; \angle B \cong \angle B'$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

Fig. 2.34

Construiremos a continuación un par de triángulos en $\boldsymbol{C}$ que satisfacen las condiciones del Criterio Ángulo-Lado-Ángulo.

Sean los triángulos en el Plano Radial, ΔABC con vértices

A(3, 0), $\quad B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad$ y $\quad$ C(-3√3, -3) y $\Delta A'B'C'$ con vértices $A'(0,2)$, $B'(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ y $C'(2\sqrt{3},-2)$ (Fig. 2.35)

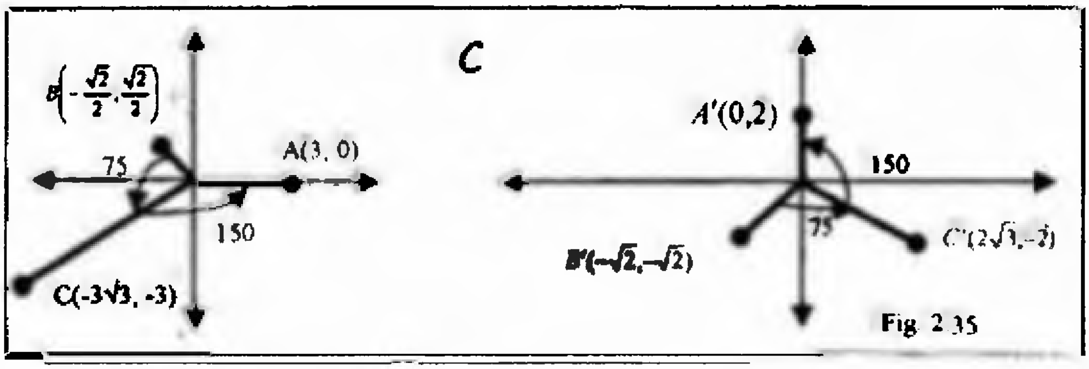


Fig. 2.35

Estos triángulos en *C* satisfacen lo siguiente:

$$\angle ABC \cong \angle A'B'C' = 150$$
$$\angle CAB \cong \angle C'A'B' = 75$$
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \cong 4$$

Pero ΔABC y $\Delta A'B'C'$ no son congruentes puesto que:

$$\overline{BC} = 7 \quad , \quad \overline{B'C'} = 6$$

$$\overline{AC} = 9 \quad , \quad \overline{A'C'} = 6$$

Por tanto, el criterio de congruencia Ángulo-Lado-Ángulo no se cumple en el Plano Radial. Más aún, puesto que los criterios de semejanza no se verifican en *C*, y la congruencia de triángulos es un caso específico de la semejanza de triángulos, es de esperar que los criterios de congruencia no se satisfagan en el modelo del Plano Radial.

2.3.4 Ángulo Exterior

Definición: Sea ΔABC un triángulo cualquiera. Un ángulo exterior de ΔABC es aquél que forma un par lineal con uno de los ángulos internos del triángulo.

Dado un triángulo ΔABC en el plano euclidiano, si deseamos determinar, por ejemplo, el ángulo exterior al ángulo $\angle$ABC, debemos prolongar el lado $\overline{CB}$ hasta un punto X para formar el rayo $\overrightarrow{BX}$. Así el ángulo exterior $\angle$XBA es el formado por la unión de los rayos $\overrightarrow{BX}$ y $\overrightarrow{BA}$ (Fig. 2.36).

Fig. 2.36

Ahora bien, consideremos un triángulo ΔABC en el Plano Radial. Si prolongamos el lado $\overline{CB}$ hasta un punto E, tenemos que los rayos $\overline{BE}$ y $\overline{BA}$ no forman ángulo en el modelo del Plano Radial, puesto que un ángulo es la unión de dos rayos no colineales con origen común (Fig. 2.37).

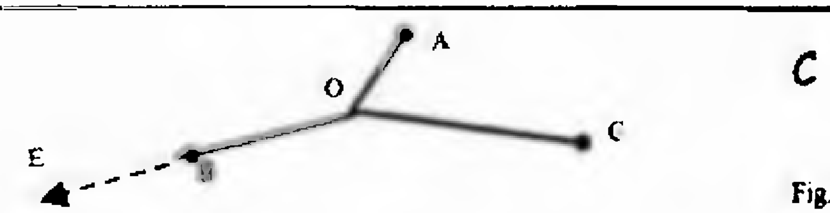


Fig. 2.37

Por tanto, al prolongar uno de los lados de un triángulo en $\mathcal{C}$, no se puede formar el ángulo exterior.

2.3.5 Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (Fig. 2.38).

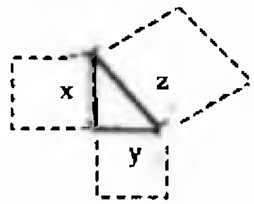


Fig. 2.38

¿ Se verifica en el Plano Radial el Teorema de Pitágoras ?

Sea ΔABC un triángulo rectángulo en *C* con vértices

$A(4, 0)$, $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $C(0, -1)$ (Fig. 2.39)

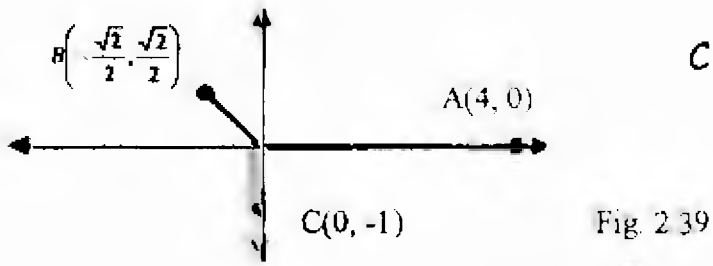


Fig. 2.39

En este triángulo del Plano Radial el ángulo recto es $\angle ABC$, la hipotenusa es $\overline{AC}$ y los catetos son los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Nótese que $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \neq \overline{AC}^2$

ya que $25 + 4 \neq 25$

lo cual muestra que en el modelo del Plano Radial no se cumple el Teorema de Pitágoras.

2.3.6 Triángulo Equilátero y Equiángulo

En la geometría euclidiana se cumple la siguiente proposición: Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo. En el Plano Radial un triángulo equilátero no es necesariamente equiángulo, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea ΔABC el triángulo en *C* de vértices

A(1, 1) , B(-√2, 0) y C(1, -1) (Fig. 2.40)

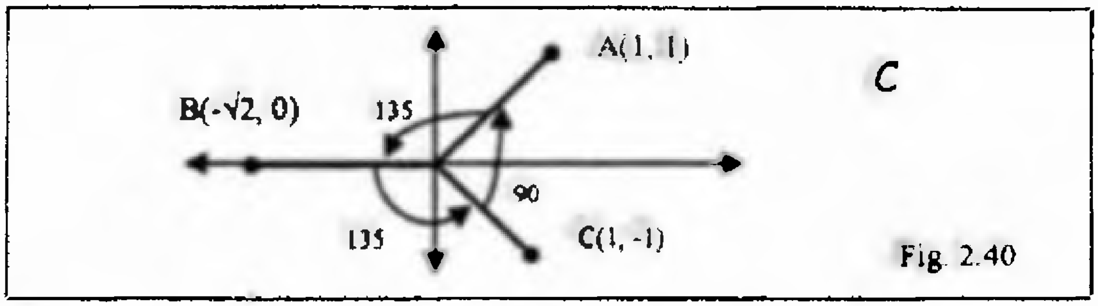


Fig. 2.40

El triángulo ΔABC en ***C*** es equilátero puesto que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 2\sqrt{2}$, pero sus ángulos no son congruentes, pues m∠ABC=90 y ∠BCA≅∠CAB=135.

Recíprocamente se tiene que dado un triángulo equiángulo en ***C***, éste no necesariamente es equilátero. Por ejemplo, considérese el ΔABC en ***C*** de vértices

A(3, 0) , B(-1, √3) y C(-2, -2√3) (Fig. 2.41).

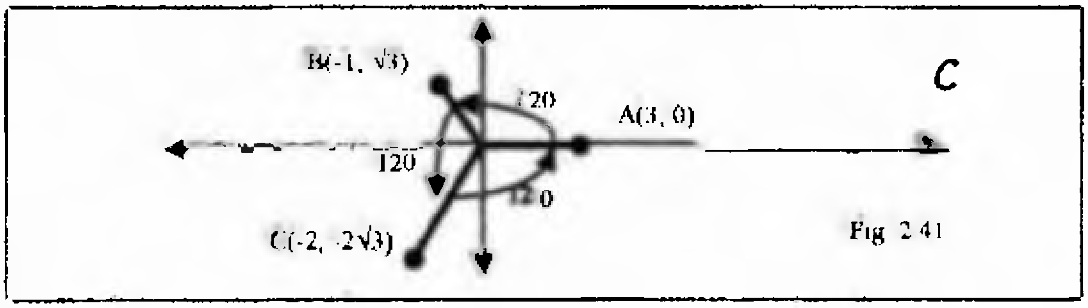


Fig. 2.41

El ΔABC es equiángulo, puesto que $\angle ABC \cong \angle BCA \cong \angle CAB = 120$. Sin embargo, $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 6$ y $\overline{AC} = 7$.

2.3.7 Desigualdad Triangular

Definición: En todo triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados (Fig. 2.42).

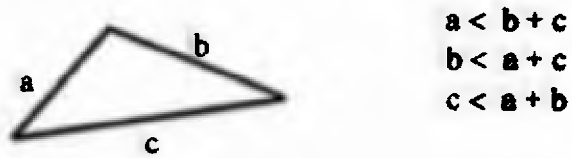


Fig. 2.42

A continuación probaremos que la función distancia en el Plano Radial verifica la desigualdad triangular. Sea ΔABC un triángulo cualquiera en $\mathcal{C}$ (Fig. 2.43).

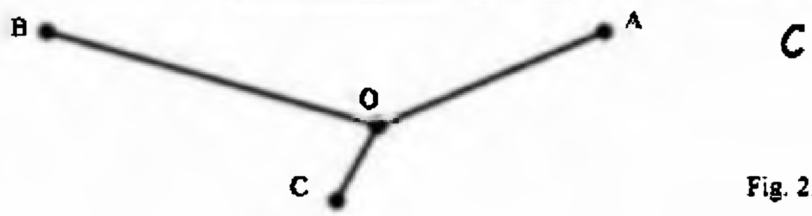


Fig. 2.43

Por demostrar:

a) $d(A,B) < d(A,C)+d(C,B)$

b) $d(B,C) < d(B,A)+d(A,C)$

c) $d(A,C) < d(A,B)+d(B,C)$

a) $d(A,B) < d(A,C)+d(C,B)$

$d(A, B) = d_u(A, O) + d_u(O, B)$	definición de distancia en $\mathcal{C}$
$d(A, B) < d_u(A, O) + d_u(O, B) + d_u(O, C) + d_u(O, C)$	puesto que $2d(O, C)>0$.
$d(A, B) < d_u(A, O) + d_u(O, C) + d_u(O, C) + d_u(O, B)$	reagrupando
$d(A, B) < d_u(A, O) + d_u(O, C) + d_u(C, O) + d_u(O, B)$	propiedad simétrica de la distancia euclidiana
$d(A,B) < d(A,C)+d(C,B)$	definición de distancia en $\mathcal{C}$

Las partes (b) y (c) se demuestran análogamente.

2.3 Circunferencias y Círculos en el Modelo *C*.

Definición: Una *circunferencia* de centro O y radio r es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia r de O (Fig. 2.44).

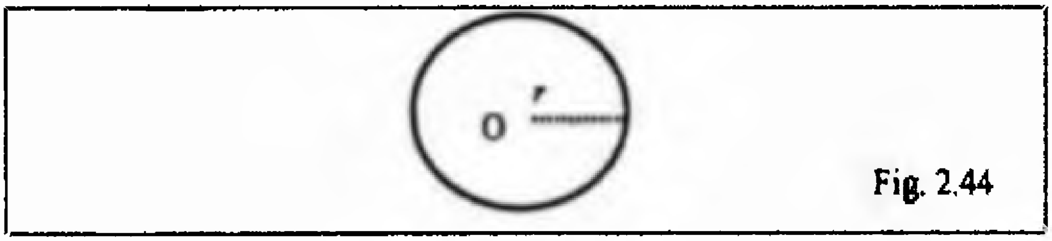


Fig. 2.44

Definición: Un *círculo* es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a una distancia menor o igual a una distancia r de un punto O dado.

En el plano euclidiano toda circunfencia es continua; es decir, no encontramos "saltos" en su gráfica. Sin embargo, en el Plano Radial, considerando cuidadosamente la definición de circunferencia, se dan ejemplos en donde el punto Q(3, 0) que pertenece a la circunferencia de centro C(1, 0) y radio $r = 2$ se encuentra "fuera" de ella (Fig. 2.45).

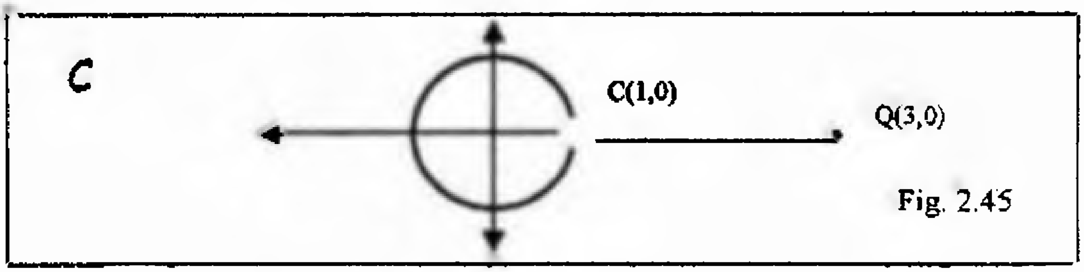


Fig. 2.45

A continuación veremos algunos hechos que pueden ocurrir con las circunfencias y círculos del Plano Radial. En la geometría euclidiana dos circunferencias cuyas distancias a sus centros es menor que la suma de sus radios, se intersectan en dos puntos (Fig. 2.46).

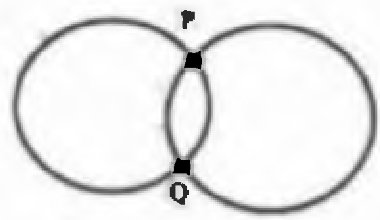


Fig 2.46

Sin embargo, dos circunferencias en el Plano Radial cuyas distancias a sus centros es menor que la suma de sus radios pueden intersectarse en :

- **Ningún punto**: La circunferencia C_1 de centro $C_1(-1, 0)$ y radio $r_1 = 2$, y la circunferencia C_2 de centro $C_2(2, 0)$ y radio $r_2 = 4$ tienen sus centros a una distancia menor que la suma de sus radios, pero no se cortan en ningún punto (Fig. 2.47).

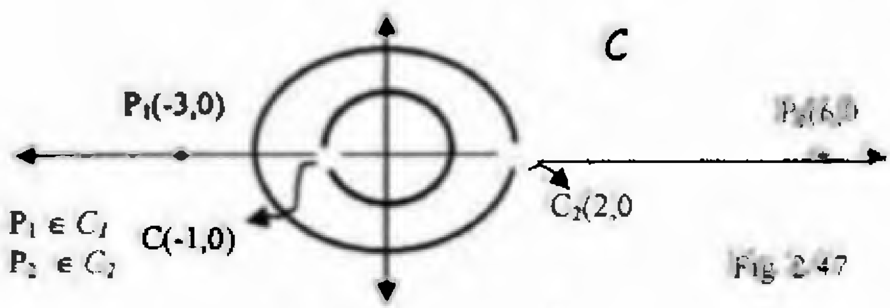


Fig 2.47

Consideraremos ahora el interior de una circunferencia en el Plano Radial; es decir, el conjunto de puntos cuya distancia al centro es menor que el radio. En el ejemplo tenemos que los círculos de C_1 y C_2 poseen puntos interiores en común y sin embargo no se cortan en sus circunferencias. Por consiguiente, en el Plano Radial dos círculos no concéntricos que poseen puntos interiores en común pueden no intersectarse en sus circunferencias.

- **Sólo un punto**: Las circunferencias C_1 de centro C(-1, 0) y radio $r_1 = 2$, y C_2 de centro $C_2(1, 0)$ y radio $r_2 = 4$ se intersectan solamente en el punto $P_1(-3, 0)$ (Fig.2.48).

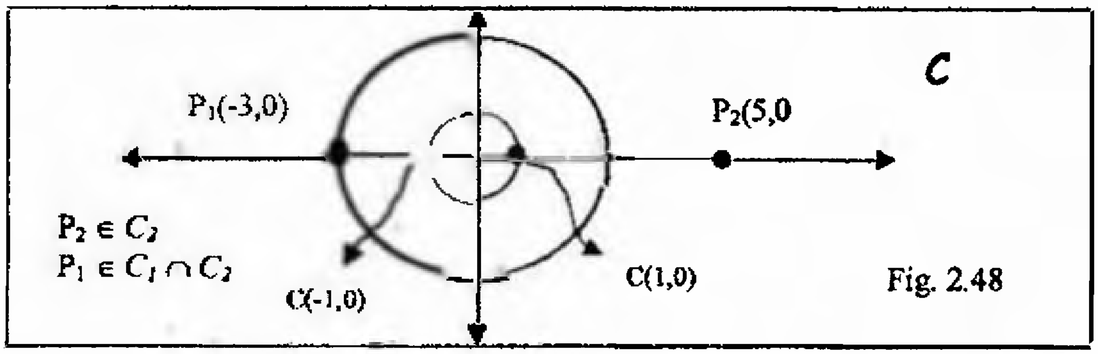


Fig. 2.48

- **Infinitos puntos**: La circunferencia C_2 de centro $C_2(2, 0)$ y radio $r_2 = 3$ se intersecta con la circunferencia unitaria C_1 en infinitos puntos (Fig. 2.49).

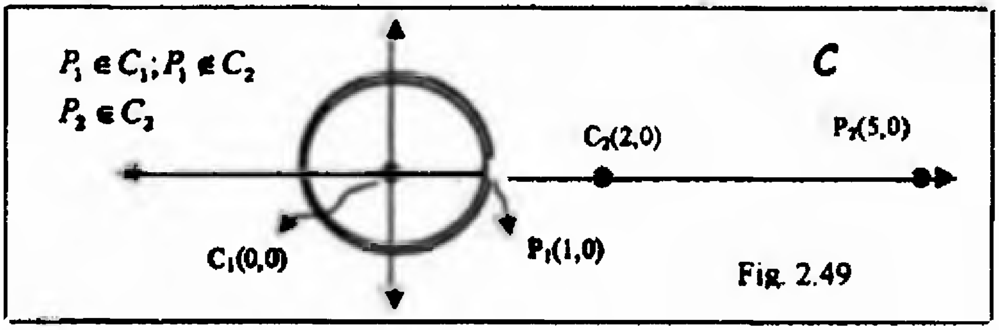


Fig. 2.49

2.4 Perpendicularidad en *C*.

En esta sección consideraremos si en el Plano Radial es posible bajar la perpendicular a una recta desde un punto P exterior a ella.

Sea ℓ una recta del Plano Radial y sea P un punto exterior a ℓ (Fig. 2.50).

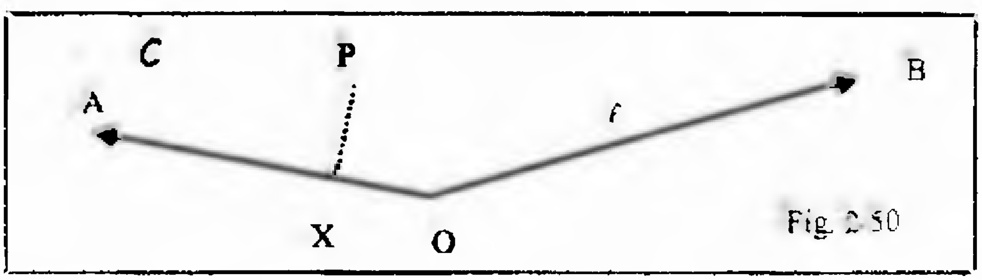


Fig. 2.50

a) Si al bajar la perpendicular al rayo $\overrightarrow{OA}$, esta línea perpendicular incide sobre un punto X de $\overrightarrow{OA}$ (X ≠ O), se tiene que la línea que pasa por $\overleftrightarrow{PX}$ no constituye recta en el Plano Radial porque no cumple con la definición de recta en $\mathcal{C}$.

b) Si al bajar la perpendicular desde P al rayo $\overrightarrow{OA}$, esta línea perpendicular incide sobre el punto O de $\overrightarrow{OA}$ (X = O), se tiene que $\overrightarrow{OP}$ es rayo perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ pero no necesariamente al rayo $\overrightarrow{OB}$ (Fig. 2.51).

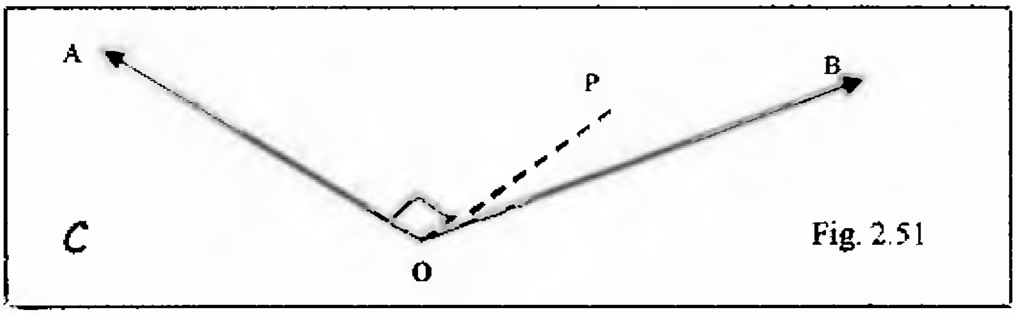


Fig. 2.51

Si se tratase de bajar la perpendicular al rayo $\overrightarrow{OB}$, sucedería de manera similar a lo expuesto en las partes (a) y (b). Esto nos induce a afirmar que dado un punto exterior P y una línea recta ℓ del Plano Radial, no siempre es posible bajar la perpendicular desde P a ℓ.

2.5 Cuadrilátero de Saccheri.

Definición: Un cuadrilátero □ABCD en el cual $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\angle ABC \cong \angle BCD = 90$ se llama *cuadrilátero de Saccheri* (Fig. 2.52).

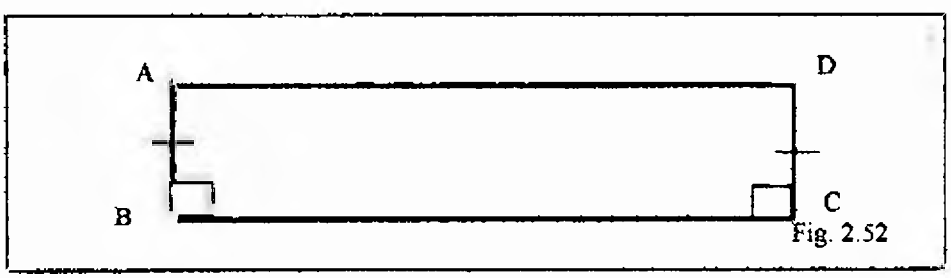


Fig. 2.52

A continuación probaremos que los ángulos superiores ∠BAD y ∠ADC de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes y rectos en el Plano Radial (Fig. 2.53).

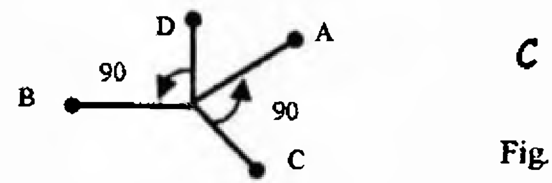


Fig. 2.53

Prueba: Por definición de cuadrilátero de Saccheri, tenemos $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

$90° = m\angle ABC$

$90 = m\angle BCD$

Además,

$m\angle ABC = m_u\angle AOC$ (definición de medida angular en el Plano Radial)

$m\angle BCD = m_u\angle BOD$ (definición de medida angular en el Plano Radial)

Luego, por transitividad, se tiene $m_u\angle AOC = 90$ y $m_u\angle BOD = 90$ •

Por otra parte, $m\angle ADC = m_u\angle AOC$ (definición de medida angular en *C*)

$m\angle BAD = m_u\angle BOD$ (definición de medida angular en *C*) ••

Por • y •• se tiene que $m\angle ADC = m_u\angle AOC = 90$
$m\angle BAD = m_u\angle BOD = 90$

Así hemos probado que los ángulos superiores del cuadrilátero de Saccheri en *C* son congruentes y rectos.

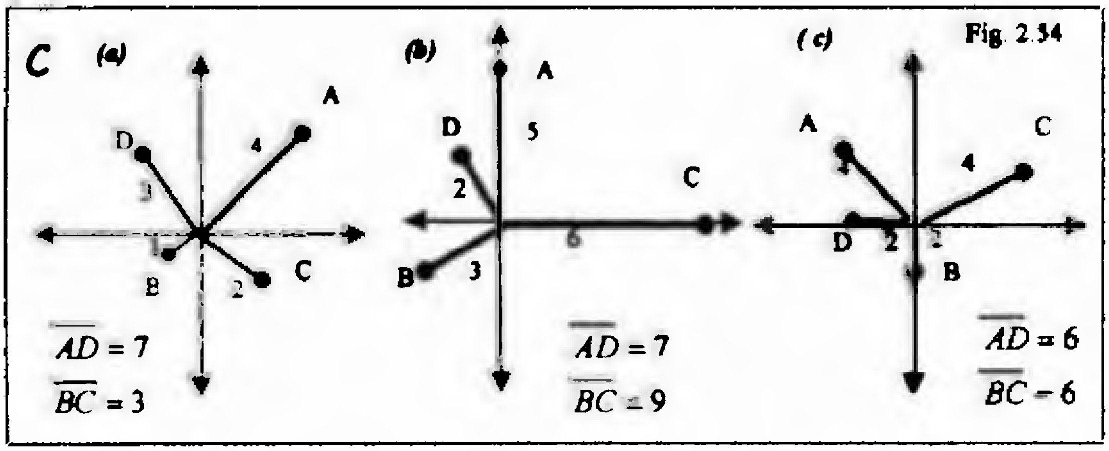
Otras propiedades del cuadrilátero de Saccheri en el Plano Radial son:

- La base $\overline{AD}$ puede ser: a) De mayor longitud

  b) De menor longitud

c) De igual longitud

que la base $\overline{BC}$ (Fig. 2.54)



- Las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ no necesariamente son congruentes, ya que en el caso (a) se tiene $\overline{BD} = 4; \overline{AC} = 6$; en el caso (b) se tiene $\overline{BD} = 5; \overline{AC} = 11$ y en el ejemplo (c) se tiene $\overline{BD} = 4; \overline{AC} = 8$.

2.6 Las Transformaciones Elementales en el Plano Radial

A continuación presentaremos la definición de algunas transformaciones elementales, seguidas respectivamente de observaciones sobre el comportamiento de éstas en el modelo *C*.

Definición: Sea E un plano y $\overline{PQ}$ un segmento dirigido. Una *traslación* Γ_{PQ} es una transformación de E sobre sí mismo que transporta cada punto X del plano E al punto X' de E tal que $XX' \cong PQ$ y $XX' \parallel PQ$ (Fig. 2.55)

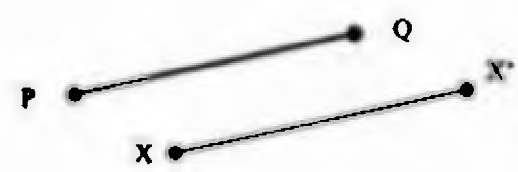


Fig 2.55

Puesto que en el Plano Radial no se verifica el Postulado 11 de Birkhoff (Postulado del Paralelismo) no es posible efectuar traslaciones en este modelo.

Definición: Sea E un plano y ℓ una recta fija en E. Una *reflexión* en la recta ℓ, denotada por R_ℓ, es una transformación de E sobre sí mismo que lleva cada punto X del plano E al punto X' de E tal que $\ell \perp XX'$ y ℓ pase por el punto medio de XX' (Fig. 2.56).

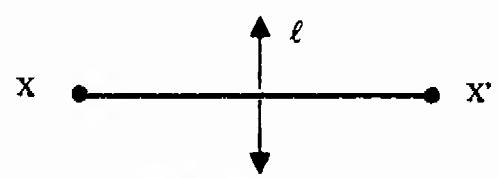


Fig. 2.56

Dada una recta ℓ en *C*, no siempre es posible realizar reflexiones, debido a que no siempre es posible construir rectas perpendiculares en el modelo del Plano Radial.

Definición: Sea E un plano, P un punto fijo de E y θ un ángulo en algún sentido. Una *rotación*, denotada $R_{P,\theta}$, es la transformación de E en sí mismo que lleva cada punto X de E al punto X' de E., tal que PX ≅PX' y $m\angle XPX' = \theta$ (Fig. 2.57).

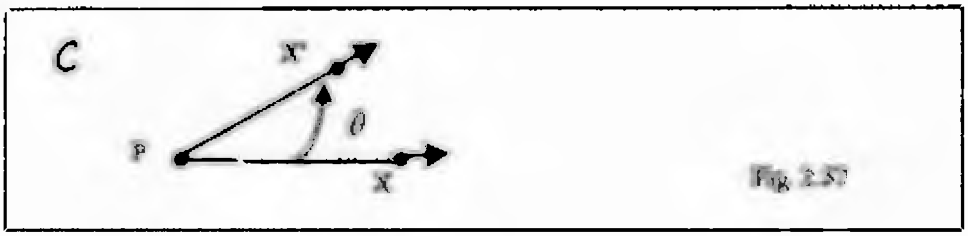


Fig. 2.57

Procederemos a probar que en el modelo del Plano Radial las rotaciones preservan la distancia y la medida angular.

Sea P un punto fijo en $\mathcal{C}$. Sea θ un ángulo cualquiera, $0 < \theta < 360$, y $\overline{XY}$ un segmento en el modelo del Plano Radial. Se presentan las siguientes posibilidades:

i) Que los puntos X y Y se encuentren en el mismo rayo con origen O.

ii) Que los puntos X y Y se encuentren en diferentes rayos con origen O.

i) Supongamos que los puntos X y Y se encuentren en el mismo rayo con origen O.

Sea $R_{P,\theta}$ la rotación en el modelo del Plano Radial de punto fijo P y ángulo θ.

$\overline{XY} \xrightarrow{R_{P,\theta}} \overline{X'Y'}$ (Fig. 2.58)

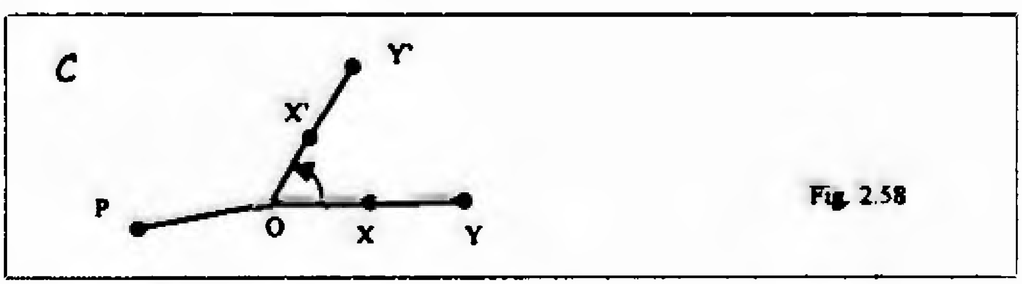


Fig. 2.58

Se tiene que $R_{P,\theta}$ es la rotación en el plano euclidiano de punto fijo el origen O(0,0) ángulo α, donde

$\alpha = \theta$ si $m\angle XPX' = m_u\angle XOX'$

$\alpha = 360 - \theta$ si $m\angle XPX' = 360 - m_u\angle XOX'$

$\alpha = 180$ si $m\angle XPX' = 180 = \theta$

Luego, $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$ puesto que las rotaciones en el plano euclidiano preservan la distancia

Por otra parte,

$m\angle XOX' = \alpha$ puesto que la transformación $R_{O,\alpha}$ en el plano

$m\angle YOY' = \alpha$ euclidiano preserva la medida angular.

Ahora queremos probar que $m\angle XPX' = \theta$. Veamos,

a) Si $\alpha = \theta$ entonces $m\angle XPX' = \theta$.

b) Si $\alpha = 360 - \theta$ entonces

$$\begin{aligned} m\angle XPX' &= 360 - m_u\angle XOX' \\ &= 360 - \alpha \\ &= 360 - (360 - \theta) \\ &= \theta \end{aligned}$$

c) Si $\alpha = 180$ entonces $m\angle XPX' = 180 = \theta$.

Como la rotación es una transformación puntual, queremos probar que cualquier punto del segmento $\overline{XY}$ tiene su correspondiente imagen en el segmento $\overline{X'Y'}$.

Sea Q un punto que pertenece a $\overline{XY}$. Tenemos que la rotación en el plano euclidiano de centro O y ángulo α lleva al punto Q a un punto Q'.

Como la rotación $R_{O,\alpha}$ es la rotación, en el modelo del Plano Radial, de punto fijo P y ángulo θ, se tiene

$$Q \xrightarrow{R_{P,\theta}} Q'$$

ii) Supongamos que los puntos X y Y se encuentran en diferentes rayos, con origen O.

Sea $R_{P,\theta}$ la rotación en el modelo del Plano Radial, de punto fijo P y ángulo θ.

$\overline{XY} \xrightarrow{R_{P,\theta}} \overline{X'Y'}$ (Fig. 2.59)

Fig 2.59

Tenemos que $R_{P,\theta}$ es la rotación en el plano euclidiano de punto fijo el origen O y ángulo α tal que

$\alpha = \theta$ si $m\angle XPX' = m_u\angle XOX'$

$\alpha = 360 - \theta$ si $m\angle XPX' = 360 - m_u\angle XOX'$

$\alpha = 180$ si $m\angle XPX' = 180 = \theta$

Luego,

$\overline{OX} \xrightarrow{R_{O,\alpha}} \overline{OX'}$

$\overline{OY} \xrightarrow{R_{O,\alpha}} \overline{OY'}$

$d(X,Y) = d_u(X,O) + d_u(O,Y)$ definición de distancia en C

$= d_u(X',O) + d_u(O,Y')$ puesto que $R_{O,\alpha}$ preserva la distancia

$= d(X',Y')$

Por tanto, $\overline{XY} \cong \overline{X'Y'}$.

Por otra parte,

$m\angle XOX' = \alpha$ puesto que la transformación $R_{O,\alpha}$ en el plano

$m\angle YOY' = \alpha$ euclidiano preserva la medida angular.

A continuación mostraremos que $m\angle XPX' = \theta$. Veamos,

a) Si $\alpha = \theta$ entonces $m\angle XPX' = \theta$.

b) Si $\alpha = 360 - \theta$ entonces $m\angle XPX' = 360 - m_u\angle XOX'$

$$= 360 - \alpha$$

$$= 360 - (360 - \theta)$$

$$= \theta$$

d) Si $\alpha = 180$ entonces $m\angle XPX' = 180 = \theta$.

Análogamente se prueba que $m\angle YPY' = \theta$.

Observación: Consideremos el caso en que parte del segmento $\overline{XY}$ esté contenido en $\overrightarrow{OP}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\overline{OX} \in \overrightarrow{OP}$ (Fig. 2.60).

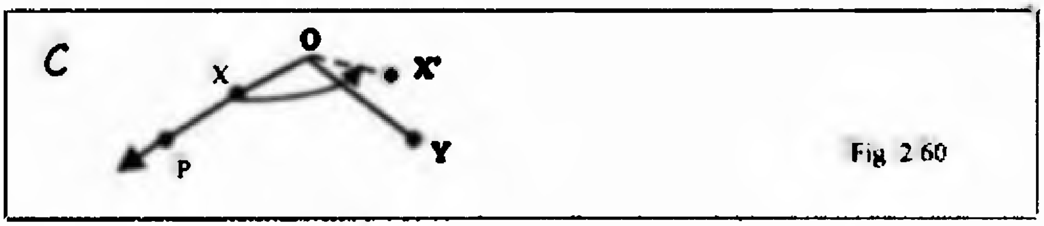


Fig 2.60

Al rotar el segmento $\overline{OX}$ mediante la rotación $R_{P,\theta}$, se presenta la dificultad en determinar el ángulo $\angle XPX'$ en el modelo del Plano Radial. Sin embargo, este hecho no afecta la posibilidad de efectuar rotaciones en el modelo *C*, ya que puede considerarse un punto P' en *C* tal que $P' \notin \overrightarrow{OP}$ (Fig. 2.61).

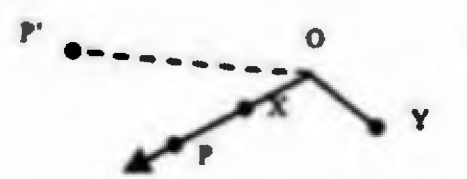


Fig. 2.61

Así, $m\angle XPX' = \theta$.

De forma descriptiva, veamos qué ocurre con la rotación de circunferencias en el modelo del Plano Radial.

Sea ***C*** la circunferencia, en el modelo del Plano Radial, de centro C(4, 0) y radio $r=6$. Efectuaremos la rotación $R_{P,\theta}$, donde $\theta = 45°$ (Fig. 2.62).

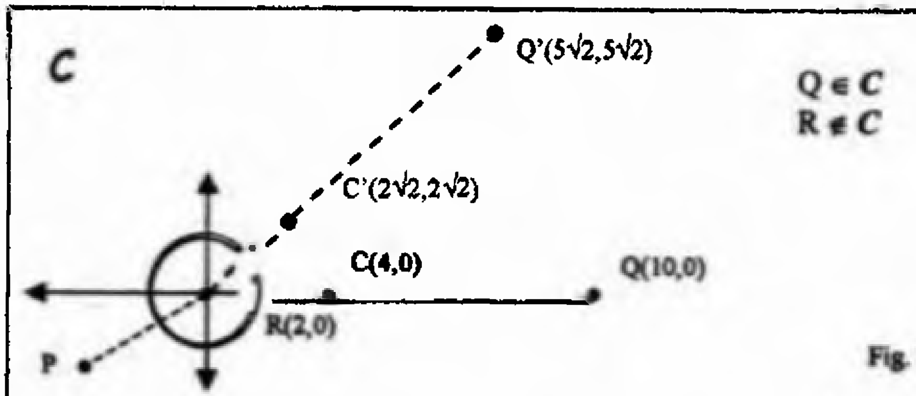


Fig. 2.62

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&C(4,0) \xrightarrow{R_{P,45}} C'(2\sqrt{2},2\sqrt{2}) \\
&R(2,0) \xrightarrow{R_{P,45}} R'(\sqrt{2},\sqrt{2}) \\
&Q(10,0) \xrightarrow{R_{P,45}} Q'(5\sqrt{2},5\sqrt{2}) \\
&\vdots \\
&\boldsymbol{C} \xrightarrow{R_{P,45}} \boldsymbol{C'}
\end{aligned}
$$

Se tiene que en la circunferencia ***C'***, imagen de ***C*** por la rotación $R_{P,45}$ se verifica:

C'(2√2,2√2) es el centro de ***C'***

R' $\notin$ *C'*

Q' $\in$ *C'*

Anteriormente probamos que las rotaciones en el modelo del Plano Radial transforman segmentos en segmentos congruentes. Y, en general, como la rotación es una transformación puntual, tenemos que las rotaciones en el modelo del Plano Radial transforman figuras en figuras congruentes (Fig. 2.63).

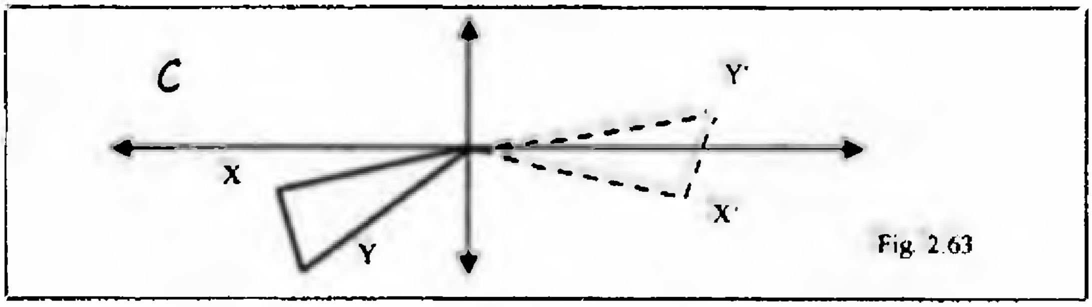


Fig. 2.63

En forma sintetizada, presentamos a continuación un cuadro en el que establecemos una comparación entre el modelo del Plano Radial, *C*, y el plano cartesiano de la geometría euclidiana.

2.8 Cuadro Comparativo de las Propiedades del Modelo del Plano Radial y el Plano Cartesiano

Plano Cartesiano, E^2	**Plano Radial, *C***
Dados dos puntos existe una única recta que los contiene.	Por dos puntos pasan infinitas rectas.
Dados dos puntos distintos a éstos les corresponde un único número real positivo (Postulado de la Distancia).	Se cumple el Postulado de la Distancia.
Se cumple el Postulado de la Regla	El Postulado de la Regla se satisface en *C*
Dados dos puntos se puede escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenada del primero sea el cero y la del segundo punto sea un número real positivo.	Dados dos puntos cualesquiera, se puede también escoger un sistema de coordenadas tal que la coordenada del primero sea el cero y la del segundo punto sea un número real positivo.
Se cumple el Axioma de Separación del Plano.	Falla la convexidad y por ello no se satisface el Axioma de Separación del Plano.
A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180.	A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 360.
Se cumple el Axioma de la Construcción del Ángulo.	Se cumple el Axioma de la Construcción del Ángulo.

Plano Cartesiano, E^2	**Plano Radial, *C***
Si P es un punto en el interior de ∠ABC entonces m∠ABC=m∠ABP+m∠PBC.	Si P es un punto en el interior de ∠ABC entonces m∠ABC=m∠ABP+m∠PBC
Se cumple el Criterio de Congruencia LAL (Post. 10 de Birkhoff).	El Criterio de Congruencia LAL no se satisface.
Por un punto exterior a una recta pasa una única paralela a la recta dada.	Todas las líneas se intersectan en el origen O(0, 0), por definición, y por tanto no existen líneas paralelas. Como consecuencia no hay paralelogramos ni trapecios en *C*.
Se cumplen los criterios de semejanza de triángulos AAA, LAL, LLL.	No se satisface ningún criterio de semejanza de triángulos.
Se cumplen los criterios de congruencia de triángulos ALA, LLL.	No se cumplen los criterios de congruencia de triángulos.
La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es 180.	La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 360.
Se puede construir los ángulos exteriores de un triángulo.	Los triángulos no tienen ángulo exterior.
El Teorema de Pitágoras se cumple.	No se verifica el Teorema de Pitágoras.
Un triángulo es equilátero si y sólo si es equiángulo.	Un triángulo equilátero no es necesariamente equiángulo y viceversa.

Plano Cartesiano, E^2	**Plano Radial, *C***
Se satisface la desigualdad triangular.	Se cumple la desigualdad triangular.
Las circunferencias son continuas.	No se cumple el principio fundamental de continuidad en las circunferencias.
Dos circunferencias cuyas distancias a sus centros es menor que la suma de sus radios se intersectan exactamente en dos puntos.	Dos circunferencias cuyas distancias a sus centros es menor que la suma de sus radios pueden intersecarse en un solo punto, ninguno o infinitos puntos.
Desde un punto exterior a una recta se puede bajar la perpendicular a dicha recta.	No siempre es posible bajar la perpendicular a una recta desde un punto exterior a ella.
Los ángulos superiores de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes y rectos.	Los ángulos superiores de un cuadrilátero de Saccheri son congruentes y rectos.
Las diagonales del cuadrilátero de Saccheri son congruentes.	No son congruentes las diagonales del cuadrilátero de Saccheri.
Se pueden efectuar rotaciones, traslaciones, reflexiones.	No es posible efectuar traslaciones ni reflexiones. Sin embargo, las rotaciones preservan la distancia y la medida angular.

El cuadro anterior nos permite observar brevemente las particularidades que presenta el modelo del Plano Radial. Son precisamente estas características las que contribuyen, en forma novedosa, a una enseñanza más eficaz de la geometría. Por ello el propósito de nuestro tercer capítulo es sustentar por qué los modelos geométricos, en especial el modelo del Plano Radial, constituye un ambiente de aprendizaje que nos permite adquirir las estrategias y habilidades cognitivas involucradas en la *resolución de problemas.*

CAPÍTULO III

LA ENSEÑANZA DE LAS ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A TRAVÉS DEL MODELO DEL PLANO RADIAL

Introducción

La resolución de problemas constituye una actividad distintiva de la Matemática, desde la que se desarrolla en nuestras aulas hasta aquélla de carácter investigativo. En la historia de la Matemática y de la educación matemática se encuentran ilustradas la importancia y la fascinación que la resolución de problemas ha captado. Por ejemplo, el problema de la independencia del Axioma de las Paralelas, del cual hicimos referencia en nuestro primer capítulo, representó un desafío a la inteligencia humana y produjo una revolución del conocimiento matemático.

Fridman [Fridman (1990)] sostiene que la resolución de problemas es considerada un *objetivo* y a la vez un *medio* para el logro de muchas metas en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Sin embargo, plantea la deficiencia existente en cuanto a la adquisición de habilidades generales se refiere por parte de los estudiantes.

El propósito de nuestro tercer capítulo está destinado a enfatizar la importancia de que nuestros estudiantes adquieran no sólo el conocimiento necesario para resolver los problemas específicos contemplados en el curriculum, sino también que desarrollen actitudes y habilidades que les permitan desenvolverse ante *problemas*[1] propiamente dichos.

Sin embargo, no es nuestro objetivo presentar aquí un análisis detallado de la literatura referente a la resolución de problemas como campo de investigación, sino sustentar por qué la enseñanza del modelo geométrico del Plano Radial contribuye de

---

[1] Atendiendo la definición dada por Fisher [Fisher (1990)] y otros autores.

manera particular a desarrollar en los estudiantes ciertas habilidades y estrategias que se persiguen con la resolución de problemas.

En este capítulo haremos referencia también a una actividad que nos permitió obtener experiencias provechosas: el *Seminario Modelos Geométricos para la Formación del Pensamiento Crítico,* llevado a cabo en enero de 1997 en la Provincia de Los Santos, en el cual se analizaron el Modelo de Moise y el Modelo del Plano Radial. Los treinta y tres participantes de este seminario, estudiantes de la Licenciatura en Matemática y profesores de Matemática a nivel medio y superior, plasmaron sus impresiones acerca del mismo en la encuesta que presentamos en el anexo de este trabajo.

3.1 Enseñanza de Habilidades de Pensamiento a través de la Resolución de Problemas

En las últimas décadas, la investigación educativa ha prestado un mayor énfasis a la enseñanza de habilidades de pensamiento. A este respecto hay que señalar la falta de consenso entre los psicólogos sobre si el pensamiento debe definirse como un proceso externo (conductual) o como un proceso interno (cognitivo). Por una parte los conductistas sostienen que la Psicología debe utilizar, como datos primarios, comportamientos observables. Y por otra parte, el argumento cognitivo expresa que el comportamiento es una manifestación del pensamiento, y por tanto una definición del pensamiento debe contemplar los mecanismos internos.

No obstante, los conceptos sobre el pensamiento serán útiles a la Psicología si y sólo si ellos generan predicciones observables [Mayer (1983)].

Según Mayer (sup. cit.), una definición general debe considerar las siguientes ideas básicas:

El pensamiento es

- **Cognitivo**: Ocurre internamente, en la mente o el sistema cognitivo, y debe ser inferido indirectamente (del comportamiento).
- **Un proceso**: Éste involucra alguna manipulación del conocimiento o de un conjunto de operaciones en el sistema cognitivo.
- **Dirigido**: Va encaminado hacia una solución. El pensamiento es lo que ocurre cuando una persona resuelve o trata de resolver un problema.

Así, varios autores definen el pensamiento relacionándolo directamente con la resolución de problemas. George Polya, por ejemplo, sugiere que la resolución de problemas está basada en procesamiento cognitivo que resulta en encontrar una salida a una dificultad, logrando una meta que no era inmediatamente alcanzable.

I. A. Snook en su obra *Teaching Pupils to Think* manifiesta que el imaginar que el pensamiento pueda ser descompuesto en sus partes componentes es mal entender la naturaleza misma del pensamiento. Sin embargo, en la literatura concerniente al estudio del pensamiento ya se encuentra a menudo una partición de éste en diferentes tópicos, como materia de conveniencia para un mejor análisis. Por ejemplo, en [Nickerson et al (1985)] encontramos señalados los siguientes temas: resolución de problemas, creatividad, metacognición y razonamiento.

En el presente trabajo estamos considerando principalmente la resolución de problemas, pero reconociendo que no se trata de un componente independiente, sino que en él intervienen las demás facetas que se puedan señalar del pensamiento.

3.2 La Resolución de Problemas

3.2.1 Definición

En el campo de la Psicología, la denominación *resolución de problemas* es utilizada generalmente para referirse a los procesos de comportamiento y pensamiento dirigidos hacia la ejecución de alguna tarea intelectual [Nickerson et al (1985)].

Un *problema* es una tarea con un cierto número de condiciones dadas y un contexto cuyos factores relevantes pueden no estar totalmente claros. La persona que confronta el problema desea o necesita encontrar una solución, pero la meta no puede ser directamente alcanzada porque hay un obstáculo o serie de obstáculos presentes [Fisher (1990)].

Según Mayer [Mayer (1983)], la mayoría de los psicólogos coinciden en que un problema contiene las siguientes características:

a) Condiciones dadas: El problema tiene un estado inicial con ciertas condiciones, objetos o piezas de información.

b) Metas: Constituyen el deseo final o estado terminal del problema, y un esfuerzo consciente es requerido para encontrar una solución.

c) Obstáculos: Aunque el resolutor tiene a su disposición ciertas vías para pasar del estado inicial al estado final del problema, él no conoce la correcta secuencia de pasos que le permitirán alcanzar la meta.

Esta concepción nos permite inferir que un problema posee un carácter relativo. Por ejemplo, si se requiere encontrar el valor de x que hace verdadera la siguiente proposición:

$$5x - 7 = 8 + 2x$$

ello puede representar un legítimo problema para un estudiante del sexto grado de primaria, pero no para la mayoría de los estudiantes del segundo año secundario, que ya han iniciado el estudio del álgebra.

En resumen, una situación es un problema para una persona si ella está consciente de su existencia, reconoce que se requiere una acción y la emprende, pero no está inmediatamente capacitada para resolver la situación.

Bell [Bell (1978)] sugiere, considerando estrictamente la anterior definición, que los conjuntos de ejercicios en los textos de Matemática deberían ser llamados *ejercicios* y no problemas, puesto que muchos de ellos están diseñados para practicar procedimientos rutinarios. Sin embargo, sostiene Bell (sup. cit.), lo importante no es la denominación que se emplee, sino el que los estudiantes y maestros reconozcan la diferencia existente entre las habilidades matemáticas que se aprenden resolviendo ejercicios y las que se aprenden al enfrentar problemas reales.

3.2.2 La Resolución de Problemas como Campo de Investigación

El interés sobre cómo las personas resuelven problemas ha sido manifestado a lo largo de la historia por destacados matemáticos, filósofos y hombres de ciencia. Pappus (300 d. C.) dedicó el séptimo libro de sus *Colecciones* al estudio de un campo que él denominó *analyomenos* y que podría traducirse como el "arte de resolver problemas". Posteriormente el matemático y filósofo René Descartes (1596-1650) planeó presentar un método universal para resolver problemas en su *Reglas para la Dirección de la Mente*, trabajo que dejó inconcluso. De manera similar, Bernard Bolzano (1781-1848) sintió la necesidad de establecer en forma explícita aquellos procedimientos o formas de investigación que según él eran seguidos por los hombres capaces [Polya (1957)].

No obstante, el estudio de la resolución de problemas como campo de investigación es bastante reciente y, según Richard [Richard (1984)], puede mencionarse como precursores los trabajos de N. R. F. Maier (*Reasoning in Humans I and II*, 1930-31), K. Dunker (*On Problem Solving*, 1945), M. Wertheimer (*Productive Thinking*, 1945), A. S. Luchins (*Mechanization in Problem Solving*, 1942) y muchos otros. Pero el verdadero punto de partida de la historia de la investigación sobre resolución de problemas, considera Richard (sup. cit.), es la publicación del libro *Human Problem Solving* de A. Newel y H. Simon en 1972.

En un primer período de la investigación sobre resolución de problemas, las situaciones seleccionadas para el estudio fueron problemas tales como juegos, acertijos o rompecabezas, para los cuales no se requería una competencia relacionada con un dominio específico del conocimiento. Estas situaciones permitieron examinar las estrategias generales utilizadas por los humanos cuando no poseen un conocimiento particular en el dominio del problema. Sin embargo, durante los últimos años se han considerado otros aspectos de la resolución de problemas, prestándole más atención al conocimiento específico [Richard (1984)].

En lo que respecta al área específica de la Matemática, destacan los trabajos de George Polya sobre estrategias generales de resolución de problemas, los cuales han llegado a ser clásicos modernos. En [Nickerson et. al (1985)] se afirma que las estrategias desarrolladas por Newel y Simon, junto con aquéllas de Polya, están entre los mejores ejemplos que tenemos de habilidades de pensamiento de propósito general; es decir, de procesos o enfoques que parecen aplicables a muchos dominios.

En nuestro trabajo daremos preferencia al tratamiento desarrollado por Polya en el tópico de las estrategias, puesto que éste fue presentado considerando principalmente problemas matemáticos. Y aunque Newel y Simon han estado involucrados con un dominio más amplio que el de Polya, ellos están más inclinados al análisis de los métodos de simulación por computadora para desarrollar una teoría general de la resolución de problemas; además su enfoque se asemeja bastante al de Polya.

3.3 El Modelo de Polya

Motivado por un interés en la enseñanza efectiva de la Matemática, George Polya procuró establecer herramientas de uso general para maestros y estudiantes en las distintas clases de problemas matemáticos.

Polya en su clásico tratado sobre resolución de problemas presenta una serie de estrategias generales a las que él denomina *heurísticas*. El término *heurística* proviene del griego *heuriskin*, que etimológicamente significa "*que sirve para descubrir*" y aparece esporádicamente en la literatura de la Filosofía y de la Lógica como el nombre de un campo de estudio referente a los métodos de razonamiento inductivo [Nickerson et. al (1985)].

En contraste con las heurísticas se encuentran los *algoritmos*, los cuales consisten en una serie de pasos o reglas que, de ser seguidos correctamente, garantizan la solución. De acuerdo a Nickerson et. al (sup. cit.), Polya utilizó la palabra *heurística* para connotar razonamiento inductivo y analógico que conduce a conclusiones plausibles, lo cual contrasta con los desarrollos deductivos de pruebas rigurosas.

En esta perspectiva, debe considerarse que si bien la Matemática es ciertamente una ciencia lógica, junto al frío razonamiento deductivo, hay otro tipo de razonamiento anterior a él, al que no puede ser ajena la enseñanza de la Matemática.

En su modelo de resolución de problemas, descrito inicialmente en *How to Solve It* (1957), Polya distingue los siguientes estados:

1. Entender el problema: Consiste en considerar toda la información disponible para enfrentar el problema.

2. Diseñar un plan: Involucra formular una estrategia general, no una prueba detallada. La formulación de tal estrategia es un proceso inductivo que según Polya se encuentra siempre presente en la Matemática.

3. Llevar a cabo el plan: Esta es la etapa en donde se realiza la prueba detallada y donde el razonamiento deductivo comienza.

4. Revisar el resultado: No se trata de una simple verificación del procedimiento y la solución obtenida, sino de un examen crítico sobre alternativas e implicaciones.

Estas estrategias generales se basan en observaciones que, como maestro de Matemática, Polya ha realizado. Su enfoque descansa principalmente en el estudio de cómo los expertos resolutores de problemas actúan [Mayer (1983)].

En la aplicación de las cuatro estrategias anteriores, Polya sugiere la utilización de una serie de heurísticas más específicas que detallamos a continuación.

3.3.1 Heurísticas para representar o entender el problema

Las heurísticas que Polya presenta para esta primera fase son las siguientes:

- *Asegurarse de que se distingue entre lo desconocido, los datos y las condiciones relacionadas a los datos.*

Con el propósito de que el resolutor comprenda los aspectos importantes del problema, Polya prescribe formularse las siguientes preguntas:

¿Qué es lo desconocido?. ¿Cuáles son los datos?. ¿Cuál es la condición?. ¿Es posible satisfacer la condición?. ¿Es la condición suficiente, o redundante o contradictoria para determinar lo desconocido?.

- *Trazar una gráfica o diagrama e introducir una notación apropiada.*

La intención de esta heurística es concretizar el problema y parte de esta concretización está relacionada con el pensamiento visual. Una vez que una gráfica o diagrama es trazada, el resolutor puede traer a su mente procesos perceptuales referidos a ésta. Además una representación visual del problema puede hacer aparentes ciertas relaciones entre partes que de otra forma no serían notadas. Para efectos de concretizar, más que de visualizar, Polya también enfatiza la importancia de la notación, aunque ésta es puramente simbólica [Nickerson et. al (1985)].

- *Tratar de reestablecer o reformular el problema, cuando su representación inicial no conduce a solución.*

Esta heurística resalta la importancia de una apropiada representación del problema, puesto que si ésta es deficiente puede inhibir o imposibilitar una solución. En el caso de que no se logre avances durante la resolución de un problema, lo aconsejable es intentar enfocarlo desde una nueva perspectiva, o sea adoptar una mirada fresca y distinta hacia el problema.

3.3.2 Heurísticas para diseñar un plan.

En esta etapa, la mayoría de las heurísticas que Polya plantea involucran considerar problemas relacionados, es decir aquellos problemas cuyo proceso de solución es conocido. Veamos algunas:

- *Pensar en un problema que sea estructuralmente análogo al presente y tratar de resolver aquél.*

Según Nickerson et. al [Nickerson et. al (1985)], varios psicólogos han considerado la habilidad de ver similitudes y de razonar en forma analógica como algunos de los indicadores más confiables de inteligencia general. Por ello no sorprende que los investigadores sobre resolución de problemas enfaticen esta heurística.

- *Pensar en un problema que tenga la misma clase de incógnita pero que sea más simple.*

Polya ilustra el uso de esta heurística en la resolución de ciertos problemas de geometría sólida, para los cuales un enfoque muy efectivo es resolver problemas análogos en geometría plana y luego generalizar el método.

- *Simplificar el problema observando qué ocurre cuando éste se reduce a casos especiales.*

En su obra *Modelos de Inferencia Plausible* (1954), Polya presenta ejemplos sobre resolución de integrales indefinidas, los cuales son simplificados asignando valores específicos para las integrales con el fin de observar si alguna generalización aparece.

- *Dividir el problema en partes manejables.*

Polya señala que esta heurística puede ser doblemente beneficiosa puesto que, al tener resuelto el componente de un problema, es posible utilizar algunas veces tanto el método como el resultado del problema simple.

3.3.3 Heurísticas para ejecutar un plan.

En la resolución de problemas matemáticos, la ejecución del plan es un estado deductivo y por ello Polya no ofrece verdaderas heurísticas para esta fase, excepto las de verificar cada paso [Nickerson et. al (1985)].

3.3.4 Heurísticas para revisar los resultados.

Una vez obtenida la posible solución, el cuidadoso resolutor debe buscar formas de confirmarla o de descubrir si es errónea. Para ello, Polya sugiere las siguientes heurísticas:

- *Tratar de resolver el problema de una forma diferente.*

Encontrar una segunda forma de resolver el problema y determinar que ésta produce la misma solución, obviamente incrementa la confianza personal de que la solución es correcta y puede además sacar a relucir otros detalles del problema.

- *Examinar las implicaciones de la solución obtenida.*

Ello involucra considerar qué hechos deben ser ciertos si la solución es correcta, lo cual puede conducir a generalizaciones, al planteamiento de nuevas hipótesis y a la identificación de nuevos problemas.

Las anteriores heurísticas han sido planteadas por Polya para la resolución de problemas matemáticos, pero su aplicabilidad es mucho más general y por ello algunos programas sobre habilidades de pensamiento están basados en el trabajo de Polya .

Así como existe una amplia gama de problemas, desde situaciones de la vida diaria hasta problemas en el contexto escolar, en los problemas matemáticos también se presenta una enorme variedad. Ello implica que el uso de las heurísticas es materia de selección y adaptación. Pues, no hay algoritmos o conjuntos de algoritmos para usar en la resolución de problemas. A este respecto, cabe señalar que algunos autores, como J. Adda, han presentado críticas al modelo de Polya, indicando que en el seguimiento de las etapas "*pueden existir automatismos, aún en el caso de selección de opciones*" [Adda, J. (1987)].

Sin embargo, por nuestra definición de resolución de problemas, si un algoritmo general fuese descubierto, no habría más ningún problema porque la solución a cada problema potencial sería inmediatamente obvia, con el uso del algoritmo. Pero afortunadamente existe un número de técnicas generales que pueden ser utilizadas para dar alguna dirección al proceso de resolución de problemas. Fridman señala la importancia de este proceso al afirmar que: "Por más que los estudiantes resuelvan problemas en la escuela, en sus estudios posteriores y en el trabajo se enfrentarán a nuevos tipos de problemas. Es por ello que la escuela debe armar a los estudiantes con una *estrategia general para la resolución de cualesquier tipo de problemas.* Sólo en este caso se podrán desarrollar las capacidades generales y especiales de los estudiantes" [Fridman (1990)].

En la siguiente sección ilustraremos el uso de las heurísticas en la resolución de un problema sobre el modelo del Plano Radial, tema hacia el cual deseamos dirigir nuestra discusión.

3.4 Resolución de un Problema del Plano Radial siguiendo el Modelo de Polya.

En [Mckeachie et. al (1984)] sus autores manifiestan que la actividad docente está dirigida hacia la provisión de materiales para los estudiantes, ayudándolos a que aprendan cómo continuar aprendiendo más efectivamente. Sin embargo, este punto de vista de la educación ha sido mal interpretado en la tradicional concepción de que el papel del profesor es simplemente el de hacer el conocimiento disponible a los estudiantes. Más bien, el profesor y el estudiante tienen juntos la responsabilidad de hacer que el aprendizaje trascienda más allá del momento y el lugar en que éste ocurre.

En esta perspectiva, es importante señalar que la resolución del siguiente problema se concibe como una actividad de diálogo constante entre profesor y estudiantes.

Luego de la descripción de los elementos del modelo del Plano Radial y de la familiarización con éstos por parte de los estudiantes, el profesor puede plantear el siguiente problema:

¿Se verifica en el modelo del Plano Radial el Postulado de la Regla ?

A continuación presentaremos un ejemplo sobre cómo resolver este problema siguiendo las estrategias generales de Polya.

3.4.1 Entender el problema

En esta primera fase se hace necesario determinar si se posee el conocimiento de las partes principales que constituyen el problema. Nos preguntamos: ¿Qué establece el Postulado de la Regla ?.

El Postulado de la Regla enuncia la posibilidad de establecer una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales, tal que:

i) A cada punto de la recta le corresponde un número real.

ii) A cada número real corresponda exactamente un punto de la recta.

iii) La distancia entre dos puntos es un número real mayor o igual que cero.

Las partes (i) y (ii) manifiestan que, dada una recta ℓ, existe una aplicación biyectiva $f : \ell \to \Re$ (entre los puntos de una recta y los números reales). En (iii) se establece para dos puntos arbitrarios A y B de $\boldsymbol{C}$ que $d(A, B) \geq 0$.

La prueba que debe efectuarse es, entonces, de existencia. Es decir, basta encontrar una función biyectiva que establezca una correspondencia entre los puntos de una recta ℓ de $\mathcal{C}$ y $\Re$, para probar que el Postulado de la Regla se satisface en el modelo del Plano Radial.

3.4.2 Diseñar un plan

La comprensión del problema puede traer enseguida a la mente algunas ideas sobre cómo enfrentar el problema. Sin embargo, estas ideas pueden ser confusas y mal definidas. Así la estrategia general de diseñar un plan simplemente sugiere cuál debe ser la actitud de una persona inteligente, en el sentido *kantiano* del término; es decir, aquélla que ante una situación problemática primero examina lo que puede hacer, después analiza lo que debe hacer y finalmente lo hace.

En esta fase en que debemos planear las acciones a tomar, resulta de utilidad el considerar aquellos problemas que guardan relación con el problema que nos atañe, tal como lo sugiere Polya. A este respecto, el profesor puede recordarle a sus estudiantes que en la geometría euclidiana, se establece una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales cuando se define, por ejemplo, la función biyectiva

$f : \ell \to \Re$, tal que para cualquier punto X(x, y) de ℓ,

$$f(X) = x\sqrt{1+m^2} \qquad \text{donde} \quad m = \frac{y-0}{x-0}$$

Ahora bien, debemos tener presente la definición de línea recta en el Plano Radial. El profesor puede pedir a sus estudiantes que analicen la función f arriba definida en el modelo del Plano Radial. Por ejemplo, puede cuestionarse si la función f

es biyectiva en el caso en que la recta ℓ en *C* tiene sus rayos en un mismo lado del eje *Y* (Fig. 3.1).

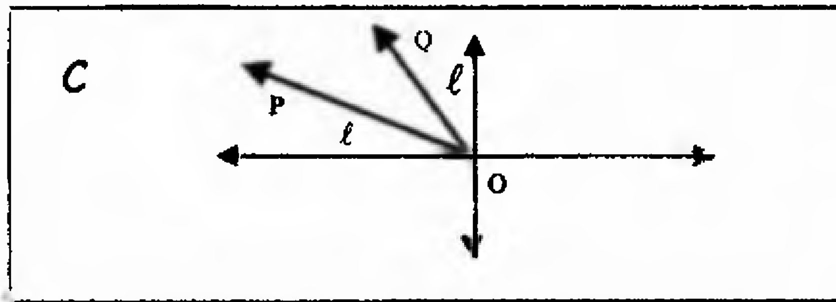


Fig. 3.1

Los estudiantes advertirán que, en el caso anterior, el codominio de f es $\Re^-$ y por tanto la función f no permite establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de ℓ y los números reales.

Sin embargo, en el caso en que los rayos de ℓ ($\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$) se encuentren en lados distintos del eje Y (Fig. 3.2), la función f sí es biyectiva.

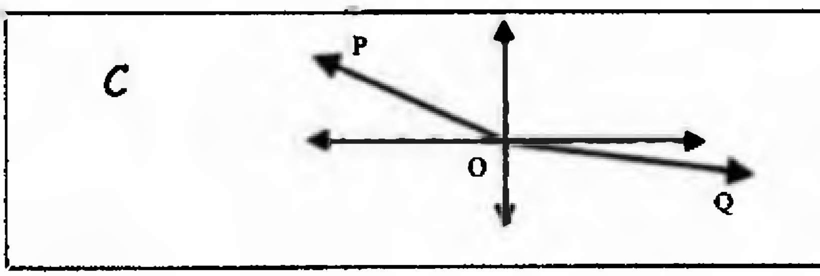


Fig. 3.2

Ahora resultaría oportuno que los estudiantes, con la orientación del profesor, indicaran los diferentes casos de rectas que se presentan en el Plano Radial, a saber:

a) La recta tiene ambos rayos del mismo lado del eje *Y*. Es decir, ambos rayos están a la izquierda del eje *Y* (cuadrantes 2 y 3) o a la derecha del eje *Y* (cuadrantes 1 y 4).

b) La recta tiene sus rayos en lados distintos del eje *Y*.

c) La recta es el eje *Y*.

d) Uno de los rayos de la recta corresponde a un rayo del eje Y.

La tarea a realizar será, entonces, definir una función similar a la expuesta anteriormente, atendiendo los diferentes casos de rectas en $\boldsymbol{C}$, y probar que esta función es biyectiva, con lo cual se demostraría que las partes (i) y (ii) del Postulado de la Regla se satisfacen en el modelo del Plano Radial. Luego restaría probar que la distancia entre dos puntos cualesquiera de $\boldsymbol{C}$ es un número real mayor o igual a cero.

3.4.3 Llevar a cabo el plan.

En esta etapa se ejecutará detalladamente lo ideado en el paso anterior. Sin embargo, cabe señalar, que a medida que se ejecuta el plan puede salir a relucir aspectos del problema que no se habían contemplado durante el diseño. Es decir, que la resolución de un problema, por tratarse de un procedimiento heurístico (no algorítmico) implica trabajos de avance y retroceso, de análisis y síntesis.

A continuación se definirá la función f que establece la correspondencia entre los puntos de una recta en $\boldsymbol{C}$ y los números reales, seguido de la prueba de que f es biyectiva.

a) Si la recta tiene ambos rayos del mismo lado del eje Y entonces $f:\ell \to \Re$ se define como

$$C \to f(C) = \begin{cases} +x\sqrt{1+m^2} & si \quad C \in \overline{OP} \\ 0 & si \quad C = 0 \\ -x\sqrt{1+m^2} & si \quad C \in \overline{OQ} \end{cases}$$

Inyectividad: f es inyectiva si para todo $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \in \ell$ se tiene que si $f(A) = f(B) \Rightarrow A = B$.

a.1) Consideremos los puntos A y B ubicados en el mismo rayo con origen O. Sin pérdida de generalidad, supongamos que es el rayo $\overrightarrow{OP}$.

$$f(A) = f(B)$$
$$f[(x_1, y_1)] = f[(x_2, y_2)]$$
$$x_1\sqrt{1+m^2} = x_2\sqrt{1+m^2}$$

$$x_1 = x_2$$

Como A y B están ubicados en el mismo rayo con origen O, y este rayo no es perpendicular al eje *Y*, se tiene que si las abcisas son iguales entonces las ordenadas también lo serán. Luego A = B.

a.2) Supongamos que A y B están sobre distintos rayos de origen O. Sin pérdida de generalidad, supongamos que A pertenece a $\overrightarrow{OP}$ y B a $\overrightarrow{OQ}$.

En este caso, para probar que f es inyectiva, probaremos la contrarrecíproca: "f es inyectiva si $\forall A, B \in \ell$ se tiene que si A≠B entonces $f(A) \neq f(B)$".

Supongamos A≠B , o sea $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$. Por definición de la función f se tiene $f(A) = x_1\sqrt{1+m_1^{\ 2}}$ y $f(B) = x_2\sqrt{1+m_2^{\ 2}}$

Como A y B están del mismo lado del eje *Y*, entonces las abcisas de los puntos A y B tienen ambas el mismo signo (ambas son positivas o ambas son negativas), y puesto que $\sqrt{1+m_1^{\ 2}} \geq 0$ y $\sqrt{1+m_2^{\ 2}} \geq 0$ se tiene que $f(A)$ y $f(B)$ difieren al menos en el signo, por definición de f. Por tanto, $f(A) \neq f(B)$.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si y sólo si $\forall y \in \Re$ existe $P(x, y) \in \ell$ tal que $f(P) = y$.

En efecto, f es sobreyectiva pues si:

- $y = 0$ existe $O \in \ell$ tal que $f(O) = y$.
- Si $y \in \Re^{-}$, existe un rayo de ℓ (sea $\overrightarrow{OP}$ u $\overrightarrow{OQ}$) tal que cada punto de este rayo es respectivamente argumento de cada número real negativo. Es decir, existe $P(x, y) \in \ell$ tal que $f(P) = y$.
- Similarmente, si $y \in \Re^{+}$ existe un rayo de ℓ tal que cada punto de este rayo es respectivamente argumento de cada número real positivo.

b) Si la recta tiene sus rayos en lados distintos del eje Y, entonces $f : \ell \to \Re$ se define como $C \to f(C) = x\sqrt{1+m^2}$ con $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Para probar la inyectividad consideremos los siguientes casos:

b.1) Que A y B estén en el mismo rayo.

b.2) Que A y B estén en rayos distintos.

b.1) Supongamos que A y B están ubicados sobre $\overline{OP}$.

$$f(A) = f(B)$$

$$f[(x_1, y_1)] = f[(x_2, y_2)]$$

$$x_1\sqrt{1+m_1^{\,2}} = x_2\sqrt{1+m_2^{\,2}}$$

$$x_1 = x_2 \qquad \text{puesto que } m_1 = m_2$$

b.2) Sin pérdida de generalidad,supongamos que A pertenece a $\overrightarrow{OP}$ y B pertenece a $\overrightarrow{OQ}$.

Inyectividad: Queremos probar que f es inyectiva; es decir, " $\forall A,B \in \ell$ se tiene que si A≠B entonces $f(A) \neq f(B)$".

Tenemos que $f(A) = x_1\sqrt{1+m_1^2}$ y $f(B) = x_2\sqrt{1+m_2^2}$.

Si consideramos los casos en que $m_1^2 = m_2^2$ y $|x_1| = |x_2|$ tendríamos que $f(A) \neq f(B)$, pues como A y B están en rayos distintos, difieren al menos en el signo.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva pues existe $y = x\sqrt{1+m^2} \in \Re$ tal que si $P = \left(x, x\sqrt{1+m^2}\right)$ entonces $f(P) = x\sqrt{1+m^2} = y$.

c) Si la recta ℓ es el eje Y entonces $f : \ell \to \Re$ se define como $C \to f(C) = y$.

Inyectividad: Supongamos que $f(A) = f(B)$

$$\Rightarrow f[(x_1, y_1)] = f[(x_2, y_2)]$$

$$y_1 = y_2$$

Y como $x_1 = x_2 = 0$ (puesto que ℓ es el eje Y) entonces se tiene que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Por tanto, A = B.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva si y sólo si $\forall y \in \Re$ existe $P(x,y) \in \ell$ tal que $f(P) = y$. En efecto, f lo es pues existe $P(x_1, y) \in \ell$ tal que $f(P) = y$.

d) Supongamos que uno de los rayos de ℓ es rayo del eje Y, entonces existe un sistema. de coordenadas $\lambda : \ell \to \Re$

$$C \to \lambda(C) = \begin{cases} +x\sqrt{1+m^2} & \text{si C está en un rayo a la izquierda del eje } Y \\ |y| & \text{si C está sobre el eje } Y \\ -x\sqrt{1+m^2} & \text{si C está en un rayo a la derecha del eje Y} \end{cases}$$

d.1) Supongamos que A está en un rayo a la izquierda del eje Y y B en el eje Y.

$$f(A) = x_1\sqrt{1+m^2} \quad ; \qquad f(B) = |y_2|$$

Queremos probar que: "Si $A \neq B \Rightarrow f(A) \neq f(B), \forall A, B \in \ell$".

Como x_1 es negativa y $\sqrt{1+m_1{}^2} \geq 0$ se tiene que $f(A)$ será en este caso siempre negativa. Y como $f(B)$ por definición es siempre positiva, se tiene que $f(A)$ y $f(B)$ difieren al menos en el signo.

d.2) A está en un rayo a la derecha del eje Y y B en el eje Y.

$$f(A) = -x_1\sqrt{1+m^2} \quad \text{y} \qquad f(B) = |y_2|$$

Ocurre de manera similar al caso (d.1), o sea $f(A)$ y $f(B)$ difieren al menos en el signo.

Sobreyectividad: f es sobreyectiva pues $\forall y \in \Re$ existe $P(x_1, y_1)$ tal que:

- Si y es positiva o cero, el punto P está en el eje Y.
- Si y es negativa, el punto P está en el rayo que no pertenece al eje Y.

Veamos ahora la parte (iii) del Postulado de la Regla.

Sea d la distancia del Plano Radial, d_u la distancia euclidiana. Sea ℓ una recta de C compuesta por los rayos $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ elementos de ℓ.

En el Plano Radial se presentan los siguientes casos:

a) Si la recta tiene ambos rayos del mismo lado del eje Y, entonces existe un sistema de coordenadas $\quad f : \ell \to \Re$

$$C \to f(C) = \begin{cases} +x\sqrt{1+m^2} & si \quad C \in \overrightarrow{OP} \\ 0 & si \quad C = 0 \\ -x\sqrt{1+m^2} & si \quad C \in \overrightarrow{OQ} \end{cases}$$

donde $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ •

Queremos probar que $d(A, B) \geq 0$. Tenemos dos situaciones:

a.1) Que A y B estén en el mismo rayo de origen O.

a.2) Que A y B estén en rayos distintos de origen O.

a.1) Supongamos A y B sobre el mismo rayo. Sin pérdida de generalidad, sea este rayo $\overrightarrow{OP}$, luego

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d_u(A, B) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2} && \text{por } \bullet \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (1 + m^2)} \\ &= \sqrt{(1 + m^2)}\,|x_2 - x_1| && \text{definición de valor absoluto} \\ &= \left| x_2\sqrt{1+m^2} - x_1\sqrt{1+m^2} \right| && ; \quad \sqrt{1+m^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$= \left|f(B) - f(A)\right| = \left|f(A) - f(B)\right|$$

Así queda demostrado que $d(A, B) \geq 0$.

a.2) Supongamos que A y B están en rayos distintos de origen O. Sin pérdida de generalidad, consideremos que A pertenece a $\overrightarrow{OP}$ y B a $\overrightarrow{OQ}$ (Fig. 3.3).

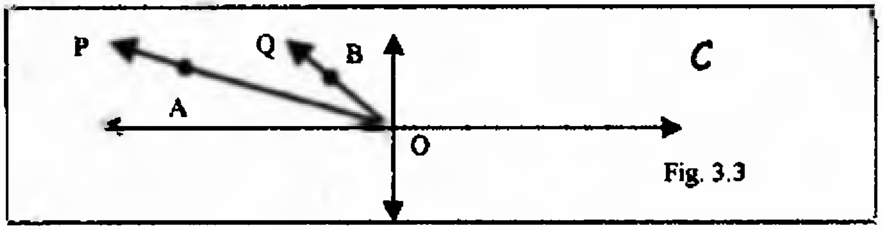


Fig. 3.3

$$d(A, B) = d_u(A, O) + d_u(O, B)$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + (m_1 x_1)^2} + \sqrt{x_2^2 + (m_2 x_2)^2} \quad \text{donde } m_1 = \frac{y_1}{x_1}, m_2 = \frac{y_2}{x_2}$$

$$= \sqrt{x_1^2(1 + m_1^2)} + \sqrt{x_2^2(1 + m_2^2)}$$

$$= |x_1|\sqrt{1 + m_1^2} + |x_2|\sqrt{1 + m_2^2} \quad \text{definición de valor absoluto}$$

$$= \left|x_1\sqrt{1 + m_1^2}\right| + \left|x_2\sqrt{1 + m_2^2}\right| \quad \text{puesto que } \sqrt{1 + m_1^2} \geq 0 \text{ y } \sqrt{1 + m_2^2} \geq 0$$

$$= |f(A)| + |-f(B)|$$

$$= |f(A)| + |f(B)| \quad \text{puesto que } |a| = |-a|$$

$$\geq 0 \quad \text{suma de valores absolutos.}$$

b) La recta ℓ tiene sus rayos en lados distintos del eje Y (Fig. 3.4).

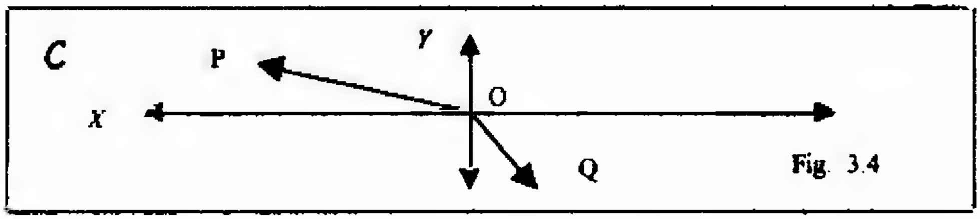


Fig. 3.4

Entonces existe un sistema de coordenadas $g : \ell \to \Re$

$$C \to g(C) = x\sqrt{1+m^2} \qquad \text{con} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Queremos probar que d(A,B) ≥ 0. Tenemos dos situaciones:

b.1) Que A y B estén en el mismo rayo de origen O.

b.2) Que A y B estén en rayos distintos de origen O.

b.1) Si A y B están en el mismo rayo de origen O, supondremos que este rayo es $\overrightarrow{OP}$, sin pérdida de generalidad (Fig. 3.5).

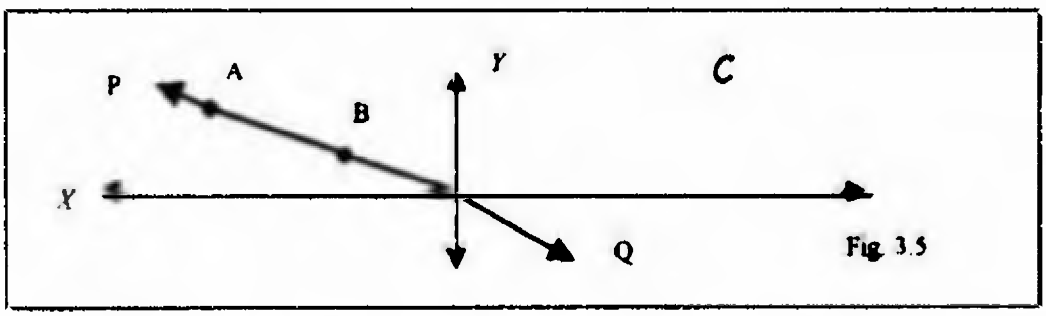


Fig. 3.5

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d_u(A, B) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (mx_2 - mx_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (1 + m^2)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(1+m^2)}|x_2 - x_1| \quad \text{definición de valor absoluto}$$

$$= \left|x_2\sqrt{1+m^2} - x_1\sqrt{1+m^2}\right| \quad ; \sqrt{1+m^2} \geq 0$$

$$= |g(B) - g(A)| = |g(A) - g(B)|$$

Así $d(A, B) \geq 0$.

b.2) Supongamos, sin pérdida de generalidad, que A está en el rayo $\overrightarrow{OP}$ y B en el rayo $\overrightarrow{OQ}$.

$$d(A, B) = d_u(A, O) + d_u(O, B)$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + (m_1x_1)^2} + \sqrt{x_2^2 + (m_2x_2)^2} \quad \text{donde } m_1 = \frac{y_1}{x_1}, m_2 = \frac{y_2}{x_2}$$

$$= \sqrt{x_1^2(1+m_1^2)} + \sqrt{x_2^2(1+m_2^2)}$$

$$= |x_1|\sqrt{1+m_1^2} + |x_2|\sqrt{1+m_2^2} \quad \text{definición de valor absoluto}$$

$$= \left|x_1\sqrt{1+m_1^2}\right| + \left|x_2\sqrt{1+m_2^2}\right| \quad \text{puesto que } \sqrt{1+m_1^2} \geq 0 \text{ y } \sqrt{1+m_2^2} \geq 0$$

$$= |g(A)| + |-g(B)|$$

$$= |g(A)| + |g(B)| \qquad \text{puesto que } |-a| = |a|$$

$$\geq 0 \qquad \text{suma de valores absolutos.}$$

c) Si la recta ℓ es el eje Y, entonces existe un sistema de coordenadas

$$h : \ell \to \Re$$

$$C \to h(C) = y$$

Queremos probar que d(A, B) ≥ 0. Tenemos dos casos:

c.1) Que A y B estén en el mismo rayo.

c.2) Que A y B estén en rayos distintos.

c.1) Si A y B están en el mismo rayo del eje *Y* (Fig. 3.6), tenemos

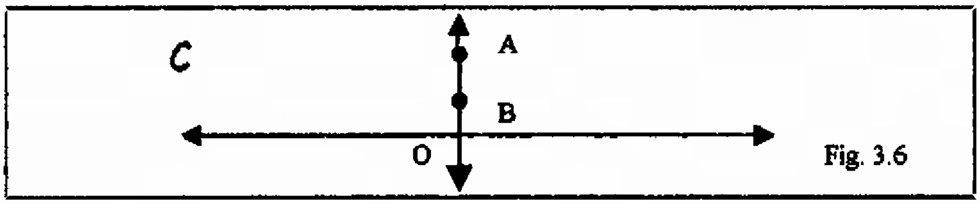


Fig. 3.6

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d_u(A, B) \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(y_2 - y_1)^2} && \text{puesto que } x_1 = x_2 = 0 \\ &= |y_2 - y_1| && \text{definición de valor absoluto} \\ &= |h(B) - h(A)| = |h(A) - h(B)| \end{aligned}$$

c.2) Si A y B están en rayos distintos del eje *Y* (Fig. 3.7).

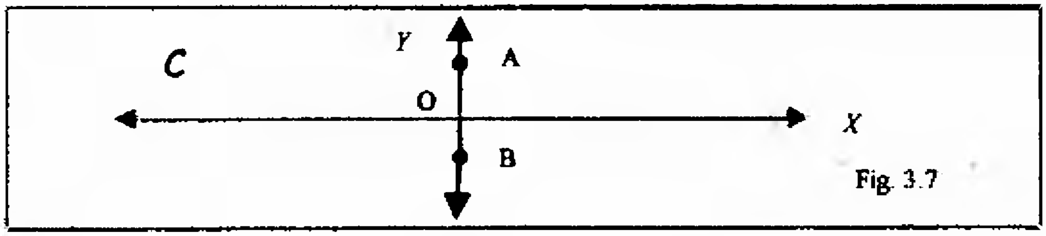


Fig. 3.7

$$\begin{aligned} d(A, B) &= d_u(A, 0) + d_u(O, B) \\ &= \sqrt{(y_1 - 0)^2} + \sqrt{(y_2 - 0)^2}\ , && x_1 = x_2 = 0 \\ &= |y_1| + |y_2| && \text{definición de valor absoluto} \end{aligned}$$

$= |h(A)| + |h(B)|$

$\geq\ 0$ suma de valores absolutos.

d) Si uno de los rayos de la recta corresponde a un rayo del eje Y, entonces existe un sistema de coordenadas $\lambda : \ell \rightarrow \Re$

$$C \rightarrow \lambda(C) = \begin{cases} +x\sqrt{1+m^2} & \text{si C está en un rayo a la izquierda del eje } Y \\ |y| & \text{si C está sobre el eje } Y \\ -x\sqrt{1+m^2} & \text{si C está en un rayo a la derecha del eje} \end{cases}$$

d.1) Supongamos que A pertenece a un rayo a la izquierda del eje Y y que B está sobre el rayo que es uno de los rayos del eje Y (Fig. 3.8).

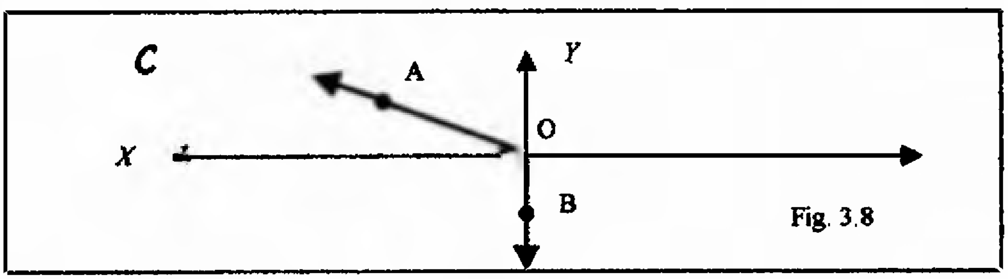


Fig. 3.8

d(A, B) = d_u(A, O) + d_u(O, B)

$= \sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2}} + \sqrt{y_2^{\,2}}$

$= \sqrt{x_1^{\,2} + m_1^{\,2} x_1^{\,2}} + |y_2|$, $\quad m_1 = \dfrac{y_1}{x_1}$

$= \left| x_1 \sqrt{1 + m_1^{\,2}} \right| + |y_2|$

$= |\lambda(A)| + \lambda(B)$

≥ 0 suma de cantidades positivas.

d.2) Supongamos que A está en un rayo a la derecha del eje Y y B sobre el eje Y (Fig. 3.9).

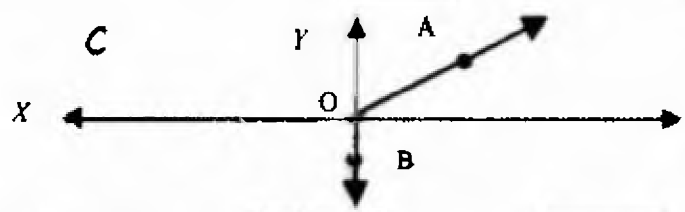


Fig. 3.9

$$
\begin{aligned}
d(A, B) &= d_u(A, O) + d_u(O, B) \\
&= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{y_2^2} \\
&= \sqrt{x_1^2 + m_1^2 x_1^2} + |y_2| \quad , \qquad m_1 = \frac{y_1}{x_1} \\
&= \left|x_1\sqrt{1+m_1^2}\right| + |y_2| \\
&= |-\lambda(A)| + \lambda(B) \\
&= |\lambda(A)| + \lambda(B) \geq 0 \qquad \text{suma de cantidades positivas}
\end{aligned}
$$

3.4.4 Revisar el Resultado

La heurística general de revisar el resultado no se limita a comprobar que no haya errores en los cálculos, en el uso de la notación o en el trazado de las gráficas.

Los estudiantes pueden efectuar verificaciones utilizando casos particulares. Además constituye un desafío el encontrar otra función que establezca la correspondencia biunívoca entre los puntos de una recta ℓ en C y los números reales.

3.5 Habilidades, Actitudes y Conocimientos que se Promueven con la Resolución de Problemas sobre el Modelo del Plano Radial.

La resolución de problemas es considerada como una actividad de aprendizaje en sí misma, puesto que conlleva no sólo la adquisición de conocimiento específico sobre la situación que se enfrenta, sino también sobre reglas de comportamiento y procedimientos aplicables a otros problemas [Richard (1984)].

Las actividades del Modelo del Plano Radial se conciben para ser llevadas a cabo por pequeños grupos y establecer luego discusiones generales, lo cual conduce a la interacción y transmisión de ideas. De esta manera la resolución de problemas se convierte en una oportunidad no sólo para adquirir nuevos conocimientos intelectuales sino también habilidades *metacognitivas* , las cuales incluyen observar cómo otros aprenden y sobre todo cómo aprendemos nosotros mismos. Pues, la *metacognición*, que en [Gage y Berliner (1992)] se define como "el conocimiento sobre el propio sistema cognitivo", es complementaria a la resolución de problemas y persigue el saber determinar cuándo aplicar específicas heurísticas y monitorear la ejecución propia para asegurar que se está logrando progreso.

Por otra parte, Fisher [Fisher (1990)] sostiene que la resolución de problemas promueve beneficios como los siguientes :

- Ofrece desafío y motivación
- Desarrolla habilidades investigativas
- Fomenta el pensamiento creativo
- Estimula el pensamiento crítico

A continuación discutiremos estos señalamientos procurando dirigir nuestros argumentos específicamente hacia la resolución de problemas sobre el Modelo del Plano Radial, con el propósito de justificar su utilización en la enseñanza.

3.5.1 Ofrece desafío y motivación

Polya [Polya (1957)] manifiesta que en la resolución de cada problema hay un grano de descubrimiento. Pues, si el problema capta nuestra curiosidad y logramos resolverlo por nuestros propios medios, podremos experimentar la tensión y luego el triunfo del descubrimiento. Por tanto, las actividades de resolución de problemas ofrecen oportunidades para estimular en los estudiantes el interés hacia el trabajo intelectual.

En lo que respecta a la enseñanza de los modelos geométricos, en particular el modelo del Plano Radial, Boone [Boone (1993)] sugiere que este puede ser utilizado como una fuente de actividades desafiantes y enriquecedoras para los estudiantes. Pues, los axiomas, teoremas y objetos geométricos en el modelo del Plano Radial serán diferentes para el estudiante, acostumbrado a trabajar en el plano euclidiano.

Podemos corroborar el anterior señalamiento aludiendo a los resultados de la encuesta aplicada en el *Seminario Modelos Geométricos para la Formación del Pensamiento Crítico*, puesto que los participantes en el calificaron de interesantes y novedosas las situaciones allí presentadas (ver anexo).

La resolución de problemas, en general, puede mejorar la motivación y el interés de los estudiantes hacia la Matemática. Sin embargo, el efecto puede ser contrario si la rapidez, precisión y la búsqueda de la respuesta correcta llegan a ser los objetivos de la resolución de problemas. Por ello es necesario proveer un ambiente armónico, brindar la orientación necesaria, sin que ello implique limitar la iniciativa del estudiante, y ofrecer el tiempo suficiente para resolver el problema, prestándole atención tanto al proceso como a la solución.

3.5.2 Desarrolla habilidades investigativas

Muchos de los estudios realizados sobre el comportamiento humano ante la resolución de problemas han prestado atención a las diferencias existentes entre los expertos resolutores y los novicios. Varios investigadores han notado que los expertos muestran una mayor tendencia a analizar un problema cualitativamente antes de intentar representarlo en forma cuantitativa. En cambio, la actitud inicial de aquellos estudiantes que han sido inefectivos resolutores es dirigir su pensamiento en una determinada dirección, sin haber dedicado tiempo a la identificación de detalles relevantes, antes de precipitarse en la búsqueda de una solución [Nickerson et. al (1985)].

El pedagogo Gagné observó que, para ser aprendices exitosos, los estudiantes necesitan algún procedimiento cognitivo adicional al conocimiento de hechos, ideas, definiciones, principios, etc. Esto es, los estudiantes necesitan estrategias de resolución de problemas que les permita planificar antes de tomar una acción [Gage y Berliner (1992)].

Sin embargo, para que un estudiante se encuentre realmente involucrado en una situación de resolución de problemas, debe tener en su mente el estado de incertidumbre y el deseo de romper la duda a través de la *averiguación*. Pues, si él está seguro de la verdad de una particular idea o acción y se muestra indiferente sobre el tema, entonces la situación no constituye un problema para el estudiante. A este respecto hay que señalar que la mayoría de los problemas que son presentados en las escuelas son problemas cerrados, que se enfocan en una sola respuesta correcta y en donde los hechos se presentan como ciertos, sin requerir comprobación o descubrimiento por parte del estudiante. Estos problemas pueden ser útiles en la verificación de la adquisición de un conocimiento o de un simple proceso, pero no promueven la averiguación.

Los problemas del modelo del Plano Radial, afirma Boone [Boone (1993)], como los ejemplos que involucran la debilitación de axiomas, tienen el propósito de provocar en los estudiantes cierta curiosidad e inquietud. En este modelo geométrico el estudiante tiene la oportunidad de generar hipótesis, de enfrentarse a situaciones nuevas en donde debe investigar, por ejemplo, si una propiedad de la geometría euclidiana es válida o no en $\mathcal{C}$.

La observación, componente esencial de la labor investigativa, se promueve a través de la resolución de problemas del modelo del Plano Radial, puesto que al considerar las definiciones de los objetos geométricos, el estudiante debe mirar con atención los casos especiales que ocurren en el modelo. A manera de ilustración, podemos mencionar que durante el *Seminario Modelos Geométricos para la Formación del Pensamiento Crítico*, se realizaron numerosas observaciones por parte de los estudiantes sobre el comportamiento de los objetos geométricos. Por ejemplo, al considerar el trazado de circunferencias los participantes señalaron la existencia de casos curiosos como el de la circunferencia de centro C(4,0) y radio r =1 del Plano Radial, cuya gráfica consta de sólo dos puntos, $P_1(3,0)$ y $P_2(5,0)$ (Fig. 3.10).

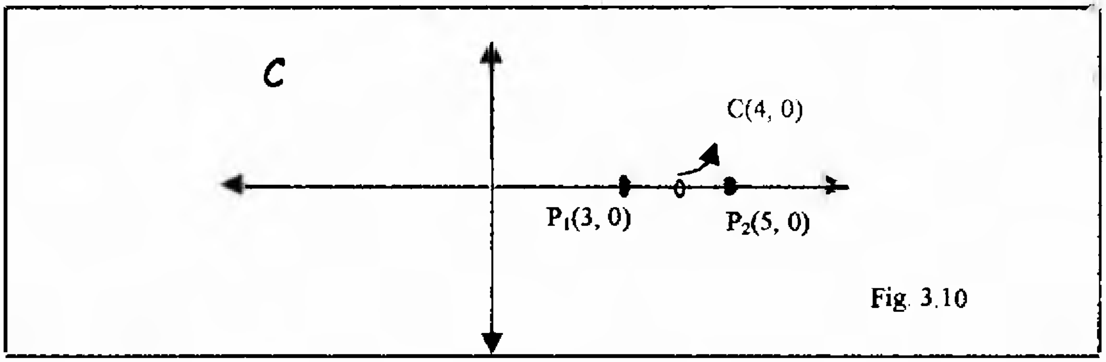


Fig. 3.10

3.5.3 Fomenta el pensamiento creativo

La habilidad de enfocar las situaciones en formas novedosas y no convencionales es una importante aptitud para la resolución de problemas, puesto que muchos problemas no se pueden resolver completamente sin un grado de inventiva.

En [Nickerson et. al (1985)] se define la *creatividad* como aquella colección de habilidades y disposiciones que conducen a una persona a producir frecuentemente productos originales o más apropiados. Aunque la creatividad es una característica muy compleja que involucra varias cualidades en la persona creativa, estos autores distinguen las siguientes plausibles componentes :

a) Habilidades : Entre las habilidades creativas, los investigadores han propuesto :

- ◊ La *fluencia ideacional* que se refiere a la producción de gran número de ideas apropiadas en forma rápida y fácil.
- ◊ Las *asociaciones remotas* que involucra el traer a colación conceptos relacionados, pero no obvios.

◊ La *intuición* que puede ser entendida como la habilidad de alcanzar conclusiones válidas a partir de mínima evidencia.

b) **Estilos cognitivos** : Enfatiza los hábitos de las personas en el procesamiento de información, como la tendencia a explorar alternativas y cambiar de dirección en la ejecución de una tarea.

c) **Actitudes** : Varios investigadores han encontrado asociaciones consistentes entre la creatividad y actitudes como la disposición hacia la originalidad y la necesidad de encontrar orden donde éste no es aparente al observador casual.

d) **Estrategias** : Se han identificado un número de estrategias que pueden contribuir al pensamiento creativo, tales como el establecimiento de analogías, la generación de una larga lista de opciones, etc.

Mayer [Mayer (1983)] define la creatividad como una actividad cognitiva que resulta en soluciones novedosas para un problema. Así, el entrenamiento en creatividad involucra enseñar a las personas como generar nuevas ideas para una situación dada.

Cabe destacar que la creatividad ha sido concebida por muchos investigadores como una característica relativamente inmodificable. Sin embargo, la carencia de evidencia de que esta habilidad sea completamente hereditaria, ha llevado a asumir que los elementos del ambiente pueden afectar el comportamiento creativo [Gage y Berliner (1992)].

Diversos programas para el mejoramiento de la creatividad han sido diseñados y puestos en práctica en diferentes partes del mundo: en las décadas de 1930 y 1940 se desarrollaron cursos de creatividad para la industria, en la década de 1960 se incorporaron al curriculum de muchas escuelas norteamericanas proyectos para mejorar esta habilidad a través de la resolución de problemas, y en la década de 1980 ha surgido un nuevo campo denominado *"ingeniería cognitiva"*. En todos estos años de investigación, pese a las fuertes afirmaciones de que la creatividad general puede ser enseñada, la mayoría de los estudios objetivos parecen mostrar que los estudiantes aprenden información y estrategias específicas que pueden ser utilizadas principalmente en problemas similares a aquéllos presentados durante la instrucción. Es decir, no existe abrumadora evidencia de que las habilidades globales pueden ser aprendidas independientemente de campos específicos [Mayer (1983)].

En esta perspectiva, considerando que no hay suficientes pruebas de que el entrenamiento en la creatividad en un dominio particular sea transferible, por ejemplo, a la creatividad en la vida diaria, parece haber no obstante concenso en el mérito de promover el pensamiento creativo. Así, aunque nuestros estudiantes no lleguen a ser artistas creativos o científicos, la enseñanza o promoción de la creatividad puede contribuir a la presentación de un mejor trabajo y a un mejor desenvolvimiento en la actividad de resolución de problemas.

En la enseñanza de la Matemática, en particular en los cursos de geometría de nuestro programa de Licenciatura en Matemática, no son numerosas las oportunidades que los estudiantes tienen para desarrollar el pensamiento creativo en esta área. Pues, la mayoría de los problemas presentados en los textos tradicionales tienden a estar muy bien definidos, a enfocarse en una sola respuesta correcta, y muchas veces requieren la competencia de un experto, por lo elaborada y precisa que es la solución. Son escasos los problemas de búsqueda abierta, en los que sea posible exhibir una variedad de enfoques para seleccionar un "mejor arreglo" en vez de un resultado exacto. A este respecto, los problemas que se presentan en el modelo geométrico del Plano Radial brindan a los estudiantes la oportunidad de producir sus propios ejemplos y contraejemplos. Además, muchas de las situaciones del modelo conllevan la exploración de alternativas, la generación de hipótesis y nuevas preguntas. Es por ello que se propone la utilización del modelo del Plano Radial como un ambiente de aprendizaje que promueve la creatividad.

3.5.4 Estimula el pensamiento crítico

Al hacer referencia sobre el pensamiento crítico, la primera dificultad que surge es que el concepto todavía no es completamente claro, como ocurre con muchas de las habilidades de pensamiento. Sin embargo, a lo largo de la literatura encontramos puntos de coincidencia entre los enfoques dados por diversos autores. Así McPeck sostiene que el significado central de pensamiento crítico es "*la propensión y habilidad para involucrarse en una actividad con escepticismo reflexivo*" y señala que el propósito de este escepticismo no es el de ser desagradable sino el de avanzar hacia la resolución de un problema. [McPeck (1981)]

Robert Ennis, cuyos trabajos en esta campo han ejercido enorme influencia, define el pensamiento crítico como *"el pensamiento reflexivo y racional encaminado a decidir qué hacer o qué creer"*. Y entre los aspectos del pensamiento crítico que este autor destaca están :

◊ Comprender el significado de una aseveración.

◊ Juzgar si hay ambigüedad en una línea de razonamiento.

◊ Juzgar si ciertas aseveraciones contradicen a otras.

◊ Juzgar si una conclusión se sigue necesariamente.

◊ Juzgar si una aseveración es suficientemente específica.

◊ Juzgar si una conclusión inductiva es justificada.

◊ Juzgar si el problema ha sido identificado.

◊ Juzgar si algo es una suposición.

◊ Juzgar si una definición es adecuada.

En las situaciones que ofrece el modelo del Plano Radial, el estudiante estará constantemente juzgando la validez de aseveraciones, puesto que muchos de los problemas a resolver consisten en descubrir, reflexionar y justificar por sí mismos si una propiedad, axioma o teorema que se satisface en el plano euclidiano es válido o no en el modelo.

Aunque estos aspectos del pensamiento crítico, señalados por Ennis, si bien se encuentran presentes en las demostraciones matemáticas, es un hecho conocido que *"la mayoría de las clases de geometría le ofrecen a los estudiantes muy pocas oportunidades de enfrentamiento con preguntas del tipo verdadero o falso y de verificar"* como indica Boone [Boone (1993)]. Razón por la cual el uso del modelo del Plano Radial se presenta como una alternativa a esta deficiencia.

3.5.5 Conocimientos que se promueven a través de la enseñanza del modelo del Plano Radial

La enseñanza del modelo del Plano Radial, que proponemos se incorpore a los cursos de geometría de la Licenciatura de Matemática, la consideramos factible puesto que para su introducción se requiere :

◊ Conocimientos de geometría euclidiana (congruencia y semejanza de triángulos, circunferencias, etc.), los cuales se imparten durante los estudios secundarios (Bachillerato en Ciencias) y se contemplan también en la Licenciatura en Matemática.

◊ Nociones de trigonometría, que se adquieren durante el Bachillerato en Ciencias.

◊ Algunos conocimientos básicos sobre geometría analítica (distancia entre puntos) que son tratados durante el Bachillerato en Ciencias.

Y de manera particular, el estudio del modelo del Plano Radial permitiría a nuestros estudiantes adquirir los siguientes conocimientos :

♦ *Una ampliación del concepto que se tiene de geometría.*

En el programa de Licenciatura en Matemática, si bien es cierto que en algunos casos se menciona la existencia de geometrías no euclidianas, lo mismo se efectúa de manera muy general, posiblemente resaltando los aspectos históricos, y el estudiante no llega a examinar propiedades, postulados o teoremas básicos. Lo anterior puede traer como resultado que nuestros estudiantes egresen de la carrera manteniendo la antigua concepción de la geometría, como limitada al estudio del espacio físico que nos rodea.

Además, el conocimiento de las geometrías no euclidianas a través del estudio de los modelos, en este caso el modelo del Plano Radial, involucra considerar cuidadosamente las definiciones de los objetos geométricos. Por ejemplo, en algunos textos de geometría, a nivel primario o secundario, es posible encontrar definiciones que se ajustan más bien a términos euclidianos, como *"triángulo es la porción del plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos"*. A este respecto, podemos señalar que en nuestra experiencia en el *Seminario Modelos Geométricos para la Formación del Pensamiento Crítico*, el estudio del modelo del Plano Radial implicó esta reconsideración de la definición de triángulo (la unión de tres líneas que se cortan dos a dos).

- *Una mejor comprensión sobre los sistemas postulacionales.*

  El análisis del modelo del Plano Radial implica :

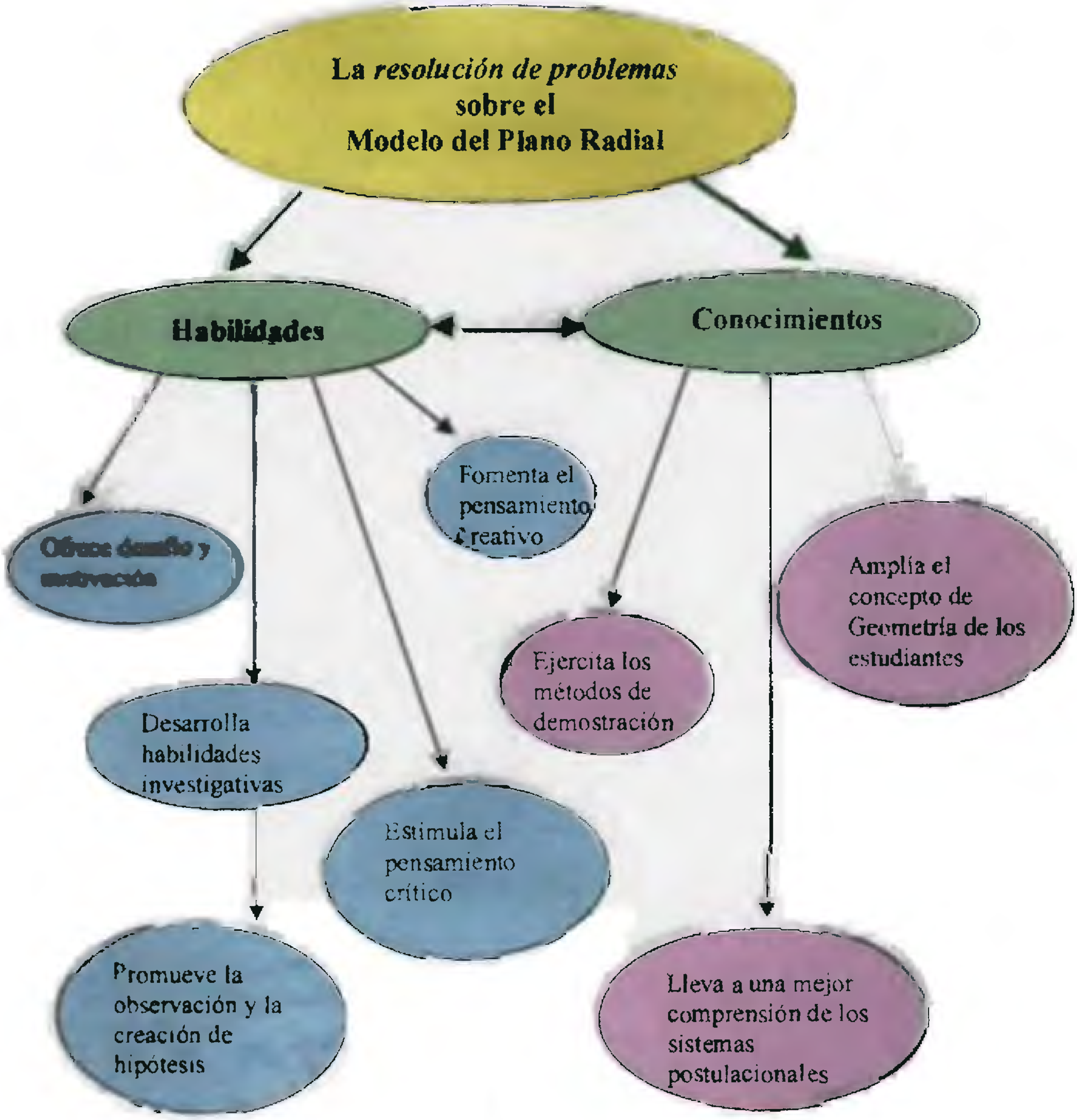
  - ◊ Considerar el significado actual de postulado, que es aquéllo que se acepta sin demostración, y no como se establece en la axiomática material (aquello que no requiere demostración por ser evidente).
  - ◊ Examinar las consecuencias de los axiomas o postulados. Pues al trabajar con el modelo el estudiante podrá observar *"cómo la negación de unos cuantos axiomas claves puede producir enormes cambios en las implicaciones de los axiomas, los teoremas"* [Boone (1993)].

◊ Conocer algunas de las propiedades que debe presentar un sistema postulacional (independencia, consistencia, etc.).

♦ *Ejercitación en el manejo de los métodos de demostración.*

En particular, el estudiante tendrá amplia oportunidad de utilizar el método indirecto de demostración por contraejemplo.

A continuación presentamos un diagrama que sintetiza lo expuesto en este capítulo, acerca de las habilidades y conocimientos que promueve la resolución de problemas sobre el modelo del Plano Radial.


La *resolución de problemas*
sobre el
Modelo del Plano Radial
Habilidades
Conocimientos
Fomenta el pensamiento creativo
Desarrolla habilidades investigativas
Estimula el pensamiento crítico
Promueve la observación y la creación de hipótesis
Ejercita los métodos de demostración
Amplía el concepto de Geometría de los estudiantes
Lleva a una mejor comprensión de los sistemas postulacionales

RECOMENDACIONES

1. Incorporar el estudio del modelo del Plano Radial en el curriculum de alguno de los cursos de la Licenciatura en Matemática, luego de un curso previo sobre geometría euclidiana.

2. Desarrollar el análisis del modelo del Plano Radial, y de otros modelos, atendiendo las estrategias o heurísticas diseñadas por Polya u otros en la resolución de problemas.

3. Buscar ambientes de aprendizaje que, como el modelo del Plano Radial, promuevan el desarrollo de habilidades generales para la resolución de problemas.

4. Concientizar a los docentes, a través de seminarios u otras actividades, sobre la necesidad de promover en nuestros estudiantes las habilidades de pensamiento, objetivo que debe privar sobre la mera adquisición de conocimientos.

BIBLIOGRAFÍA

ADDA, Josette. (1987). **Elementos de Didáctica de las Matemáticas**. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I.P.N. México.

BEITÍA, Germán. (1993). Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Una Experiencia del Uso de las Ilustraciones Gráficas en las Demostraciones en Geometría**. Panamá.

BEITÍA, Germán. (1994). Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **El Modelo del Semiplano Superior de la Geometría Hiperbólica. Su Enseñanza con los Postulados de Birkhoff**. Costa Rica.

BELL, Frederick. (1978). **Teaching and Learning Mathematics**. Wm. C. Browm Company. U. S. A.

BOONE, James. (1993).). Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **Tres Modelos Geométricos**. Panamá.

BOONE, James. (1994). Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del

Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. **El Modelo de Poincaré**. Costa Rica.

BOYER, Carl. (1968). **A History of Mathematics**. Princeton University Press. New Yersey.

BRANDAO, Alicia de. (1997). **El Modelo Geométrico de Moise en la Formación del Pensamiento Crítico**. Universidad de Panamá. Panamá.

CEREZO, G. y **RODRÍGUEZ**, Z. (1995). **El Modelo del Plano Radial, *C*. Su Aplicación en la Enseñanza de la Geometría**. Universidad de Panamá. Panamá.

EFIMOV, N. V. (1984). **Geometría Superior**. Editorial MIR. Moscú.

EVES, Howard. (1980). **Great Moments in Mathematics (Before 1650)**. Dolciani Mathematical Expositions Nº 5.

______ (1981). **Great Moments in Mathematics (After 1650)**. Dolciani Mathematical Expositions Nº 7.

______ (1985). **Estudio de las Geometrías**. Tomo I y II. Editora Hispano-América S. A. México.

FISHER, Robert. (1990). **Teaching Children to Think**. Stanley Thornes (Publishers) Ltd. Gran Bretaña.

FRIDMAN, Lev. (1990). Revista Matemática Educativa Nº 3, Vol. 1. **Metodología de la Enseñanza para la Resolución de Problemas de Matemáticas**. México.

GAGE, N. y **BERLINER**, D. (1992). **Educational Psichology**. Houghton Mifflin Company. Boston. U. S. A.

MAYER, Richard. (1983). **Thinking, Problem Solving, Cognition**. W. H. Freeman and Company. New York.

McKEACHIE et al. (1984). Memoria del XXIII Congreso Internacional de Psicología. **Learning to Learn**. México.

McPECK, John. (1981). **Critical Thinking and Education**. Martin Robertson & Company Ltd. Oxford. Gran Bretaña.

MOISE, Edwin. (1963). **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. Readding Addison-Wesley Publishing Company, Inc. U. S. A.

MOISE, E. y **DOWNS**, F. (1972). **Geoemtría**. Serie Matemática Moderna. Fondo

Educativo Interamericano. Editorial Norma. Cali, Colombia.

MORENO, L. y **BROMBERG,** S. (1987). **Fundamentos de la Geometría de Euclides a Hilbert**. Sección de Matemática Educativa. CINVESTAV I. P. N. México.

NICKERSON et al. (1985). **The Teaching of Thinking**. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. New Yersey. U. S. A.

POLYA, George. (1957). **How to Solve It**. Princeton University Press. New Yersey. U.S.A.

RICHARD, Jeans F. (1984). Memoria del XXIII Congreso Internacional de Psicología. **Mechanism of Problem Solving Behavior**. México.

SMITH, David. (1958). **History of Mathematics**. Vol. 2. Simon & Schuster, Inc. New York.

WILDER, Raymond. (1968). **Evolution of Mathematics Concepts. An Elementary Study**. John Wiley & Sons, Inc. U.S.A.

______ (1981). **Mathematics as a Cultural System**. Pergamon Press. Gran Bretaña.

ANEXO

ENCUESTA A LOS PARTICIPANTES DEL SEMINARIO

MODELOS GEOMÉTRICOS EN LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO

Estimado participante : El presente cuestionario tiene el propósito de captar tus impresiones sobre este seminario. Tus respuestas nos serán de gran utilidad para futuros proyectos. Por ello te agradecemos tu gentileza al suministrarnos la siguiente información.

1. ¿ Consideras que el contenido presentado en este seminario ha sido de fácil asimilación ?

   Sí ____
   Parcialmente ____
   No ____

   ¿ Por qué ? ______________________________.

2. ¿ Recibiste la información necesaria para resolver los problemas ?

   Sí ____
   No ____

   ¿ Por qué ? ______________________________.

3. ¿ Crees que este seminario te ha permitido afianzar tus conocimientos de Geometría ?.

   Sí ____
   Parcialmente ____
   No ____

   ¿ Por qué ? ______________________________.

4. Las oportunidades que se dieron a los estudiantes para participar fueron :

   Muchas ____
   Pocas ____
   Ninguna ____

5. ¿ Lograste por ti mismo(a) verificar el cumplimiento o no de ciertas propiedades en los modelos estudiados ?

   Sí ____
   No ____

   ¿ Por qué ? ______________________________.

6. Cuando alguno de tus compañeros presentaba una posible solución a un problema, ¿consideras que tenías los elementos necesarios para aceptarla o rechazarla ?

   Sí ____
   No ____

   ¿ Por qué ? ______________________________.

7. ¿ Este seminario ha favorecido el manejo de los métodos de demostración ?

   Sí ____
   Parcialmente ____

No _____

8. ¿ El contenido tratado durante el seminario te motivó al análisis crítico de situaciones geométricas ?

Sí _____
Parcialmente _____
No _____

¿ Por qué ? ____.

9. El tiempo que se dio para el trabajo individual y grupal fue :

Demasiado _____
Suficiente _____
Escaso _____

10. Las oportunidades para inventar o crear ejemplos y contraejemplos fueron :

Muchas _____
Pocas _____
Ninguna _____

11. ¿ Crees que lo aprendido en este seminario resultará útil para tu futuro (a nivel profesional y personal) ?

Sí _____
No _____

¿ Por qué ? ____.

12. ¿ Encontraste, a través del seminario, razones que te motivaron a seguir estudiando los siguientes temas ?

Sí _____
No _____

¿ Por qué ? ____.

13. ¿ Ha cambiado este seminario tu visión sobre la Geometría ?

Sí _____
No _____

¿ Por qué ? ____.

14. ¿ Crees que la presentación de situaciones en la enseñanza de la Matemática, como las expuestas en este seminario, ayudan a mejorar el nivel de razonamiento de nuestros estudiantes, ya sea para inferir, crear, emitir juicios, evaluar, resolver problemas o dar una opinión ?

Sí _____
No _____

¿ Por qué ? ____.

Observaciones :

____
____
____

RESULTADOS DE LA ENCUESTA APLICADA LOS PARTICIPANTES DEL SEMINARIO : *MODELOS GEOMÉTRICOS EN LA FORMACIÓN DEL PENSAMIENTO CRÍTICO*

N° de PREGUNTA	DECISIÓN	%	OBSERVACIONES
1	Sí	39.4	-Buena presentación, explicación y aplicación -Existe relación con temas conocidos. -Se observó propiedades euclidianas que se verificaban o no en los modelos.
	Parcialmente	60.6	-El tema es difícil. -El tema es nuevo. -Necesidad de aclarar más conceptos. -Necesidad de tiempo.
	No	0	
2	Sí	90.9	-Se dieron los elementos necesarios y bien explicados. -Había que utilizar lo que se conocía de la geometría euclidiana. -El grupo ayudó a resolver.
	No	9.1	-Se dejó para la creatividad del participante.
3	Sí	87.9	-Hemos podido afianzar y aplicar conocimientos. -Conocimientos nuevos. -Utilidad de las propiedades euclidianas y comparación con los nuevos modelos. -Se ha dado una visión diferente de la Geometría, hay hechos que no nos imaginamos. -Nos hizo reflexionar antes de actuar.
	Parc.	6.1	-Fue difícil acostumbrarse a la otra Geometría. -El tema está alejado de lo que se ve en el nivel medio.
	No	0	
4	Muchas	100	
	Pocas		
	Ninguna		

Nº de PREGUNTA	DECISIÓN	%	OBSERVACIONES
5	Sí	84.8	-Las facilitadoras dieron la oportunidad. -Hubo tiempo suficiente. -Se puso en práctica lo conocido. -Se tuvo que razonar. -Se fue creativo.
	No	12.1	-Por los nuevos conceptos. -Propiedades difíciles. -Tuvimos que recibir ayuda adicional.
6	Sí	90.9	-Por las herramientas adquiridas. -Seguridad en la decisión. -Persona crítica, capaz de tomar decisiones.
	No	9.1	-No comprendía lo que hacía. -Nuevos conceptos. -Existía duda en lo que hacía por la novedad de los modelos.
7	Sí	69.7	
	Parc.	30.3	
	No	0	
8	Sí	81.9	-Se presentan situaciones interesantes. -Conocimientos nuevos. -La situación es diferente a lo acostumbrado. -Lo que se cumple en uno no se verifica en el otro. -Se podían dar diferentes posibilidades.
	Parc.	12.1	-En algunos casos pueden ser verdaderos o falsos.
	No	0	
9	Demasiado	3.03	
	Suficiente	96.9	
	Poco	0	
10	Muchas	97.0	
	Pocas	3.0	
	Ninguna	0	

Nº de PREGUNTA	DECISIÓN	%	OBSERVACIONES
11	Sí	75.7	-Para ampliar el conocimiento de la Geometría y desarrollar más el análisis de situaciones. -Nos lleva a formar el pensamiento crítico, del cual adolece el estudiante. -Nos permite actualizarnos en nuestra profesión.
	No	3.03	-Porque no tiene aplicación en la vida diaria.
12	Sí	84.8	-Resultados interesantes. -Buena motivación. -Por lo desconocido del tema. -Perspectiva más amplia de la Geometría. -Los problemas se volvían un reto.
	No	12.1	-En el seminario se aprendió todo. -Dedicación a otros temas.
13	Sí	93.9	-Hemos conocido otras facetas de la Geometría. -Sólo conocía la geometría euclidiana. -La Geometría es diferente a como la pensaba.
	No	3.03	-Porque tiene diferentes interpretaciones.
14	Sí	87.9	-Presenta situaciones que necesita del razonamiento. -Da oportunidad a comparar. -Da oportunidad de descubrir resultados al enfrentarse a nuevas situaciones. -Da lugar a la creatividad. -Permite desarrollar habilidades. -El participante debe llegar a conclusiones por sí solo, aplicando lo conocido. -El no tener la seguridad de la falsedad o verdad del problema es un reto. -Despierta la capacidad de análisis.
	No	12.1	

Otras observaciones :

- ◊ El seminario fue interesante.
- ◊ Buena metodología.

- ◊ Es necesario actividades académicas donde se le dé oportunidad al estudiante de emitir sus juicios.
- ◊ No llenó las expectativas para el nivel medio.
- ◊ Es necesario ver actividades académicas que despierten en el alumno la capacidad de análisis.
- ◊ Se debe seguir ofreciendo más seminarios de este tipo.
- ◊ El seminario es bueno porque el alumno trabaja constantemente.
- ◊ Se debe presentar situaciones similares que se puedan presentar a nivel medio.
- ◊ Este seminario permite analizar situaciones que no se dan en la "geometría común", permitiendo un juicio diferente y un criterio más abierto.
  - ◊ Muy buenas oportunidades para participar ; fomenta el pensamiento crítico.